

Vui lòng đổi tên trường cho đúng giúp

Tên bài báo	Tên cần hiệu chỉnh
¹ Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường 14, quận 10, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam	¹ Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường 14, quận 10, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
Lương Văn Hải, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường 14, quận 10, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam	Lương Văn Hải, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường 14, quận 10, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Ghi chú cho các highlight cần chỉnh sửa trong bài báo:

Trang 2:

-tấm trên và tấm dưới sửa lại là: mặt trên tấm trên và mặt dưới tấm dưới

-trên nền : chữ bị dính liền sửa lại là: “trên nền”

-công thức (1): dấu ngoặc tròn (đổi thành dấu ngoặc vuông

Trang 3:

-Công thức (4): cần đưa công thức vào giữa trang

-sau từ “dưới” thiếu dấu phẩy

-công thức (7): cần đưa công thức vào giữa trang và bỏ dấu (-)

-công thức (8) và công thức (9): thay dấu ngoặc tròn bằng dấu ngoặc nhọn

-công thức (9): bỏ dấu “{}”.

Trang 4:

-đổi ε_t thành ε_T .

-công thức (11): thay dấu ngoặc tròn “(” thành dấu ngoặc “{”

-công thức (12) : thay dấu ngoặc tròn “(” thành dấu ngoặc “{” hoặc ngoặc “[”

-công thức (14) : thay dấu ngoặc tròn “(” thành dấu ngoặc “{” hoặc ngoặc “[” (chú ý mở ngoặc nào thì đóng bằng ngoặc đó), chuyển số (14) về cuối lề phải

-công thức (15) và (16): thay dấu ngoặc tròn “(” thành dấu ngoặc “{” hoặc ngoặc “[” (chú ý mở ngoặc nào thì đóng bằng ngoặc đó), chuyển số (15) và (16) về cuối lề phải

-trước từ “là” cần có khoảng trắng

-bỏ đi cụm “là $K_s=5/6$ ”

-công thức (17), (18), (19), (20), (21),(22) và (23) đưa vào giữa trang; số (17), (18), (19), (20), (21),(22), và (23) đưa về cuối lề phải

Trang 5:

-Đổi ký hiệu “ α ” thành “a”

-Đổi số (16) thành số (26) và đưa về cuối lề phải, công thức đưa vào giữa trang

Trang 6:

-công thức (27),(28),(29),(30),(31),(32),(33),(34),(35),(36),(37) và (38) đưa vào giữa trang.
Số (27),(28),(29),(30),(31),(32),(33),(34),(35),(36),(37) và (38) đưa về cuối lề phải

Trang 8:

-viết lại bảng 3

-“1.” Và “1” đổi thành “1.0”

-“ N/m^3 ” đổi lại là N/m

Trang 9:

-“ T_t ” đổi lại là T_{tt}

-trong bảng 4, dấu (-) và số phải cùng một hàng

-“tác dụng” bị dính từ đổi thành “tác dụng”

-“1.” và “1” đổi thành “1.0”

-Trước “ $a_2=2a$ ” phải có dấu phẩy

-“ α ” đổi thành a

-trước hàng tô vàng không có khoảng trắng

Trang 10:

-“vớinhững” bị dính từ đổi thành “vớinhững”

Chú ý: các đoạn văn trong bài chưa được căn lề phải, đề nghị căn lại lề phải.

Phân tích ứng xử động của tấm nhiều lớp chịu tải trọng di chuyển với gia tốc thay đổi và ảnh hưởng nhiệt độ

Trần Nam Hải^{1,2}, Nguyễn Thị Thanh Quý^{1,2}, Lương Văn Hải^{1,2,*}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

¹Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường 14, quận 10, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (VNU-HCM), phường Linh Trung, Thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Liên hệ

Lương Văn Hải, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường 14, quận 10, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (VNU-HCM), phường Linh Trung, Thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Email: lvhai@hcmut.edu.vn

Lịch sử

- Ngày nhận: 01-01-2025
- Ngày sửa đổi: 10-3-2025
- Ngày chấp nhận: 30-3-2025
- Ngày đăng:

DOI:



Bản quyền

© ĐHQG Tp.HCM. Đây là bài báo công bố mở được phát hành theo các điều khoản của the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



TÓM TẮT

Bài báo này xây dựng lý thuyết và phương pháp số mới để phân tích ứng xử động của tấm nhiều lớp đặt trên nền Pasternak chịu tải trọng di động với gia tốc thay đổi và xét ảnh hưởng của nhiệt độ. Phương pháp được nghiên cứu trong bài báo là phương pháp tấm nhiều lớp chuyển động MMPM (Multi-Layer Moving Plate Method). Ngoài ra, bài báo sử dụng lý thuyết tấm dầy Mindlin và nguyên lý công ảo để thiết lập phương trình chủ đạo mô tả chuyển động tấm và lực tác động. Tấm sau đó được rời rạc thành các phần tử 9 nút bằng phương pháp MMPM, và ghép nối các ma trận phần tử vào ma trận tổng thể để thu được phương trình chuyển động tổng quát của tấm nhiều lớp. Phương trình tổng quát này được giải bằng phương pháp Newmark để cho ra kết quả có hội tụ. Bài báo thực hiện được kiểm chứng với các kết quả thu được ở trường hợp tải tĩnh và tải động để so sánh với các công trình đã công bố nhằm chứng minh độ tin cậy của các kết quả trong nghiên cứu này. Tiếp theo, bài báo khảo sát các bài toán với những giá trị gia tốc khác nhau để xem xét sự ảnh hưởng của đại lượng này tới ứng xử tấm. Đồng thời, ảnh hưởng nhiệt độ được xem xét đến chuyển vị của tấm bằng cách đặt nhiệt độ tại mặt trên của tấm khác với nhiệt độ tại mặt dưới của tấm.

Từ khoá: Phương pháp tấm nhiều lớp chuyển động (MMPM), tải di động có gia tốc, nhiệt độ

GIỚI THIỆU

Đi cùng với sự phát triển kinh tế xã hội thì nhu cầu di chuyển và vận tải hàng hóa ngày càng gia tăng, vì lẽ đó mà cơ sở hạ tầng giao thông bao gồm hệ thống đường băng sân bay và đường cao tốc nhận được nhiều sự quan tâm của cộng đồng khoa học. Các kết cấu dạng này được mô hình như là một dầm hay tấm trên nền đàn nhớt chịu tác dụng của tải trọng di chuyển. Một số nghiên cứu liên quan đến phân tích kết cấu tấm trên nền đàn hồi bằng phương pháp giải tích phải kể đến như sau. Kim và Roeset¹ đã khảo sát ứng xử động của một tấm dài vô hạn trên nền đàn hồi chịu tải di động hằng số và tải điều hòa, phương pháp biến đổi Fourier FFT (Fast Fourier Transform) được sử dụng để tìm lời giải cho phương trình chủ đạo. Tiếp theo đó, Kim² đã phân tích ứng xử của tấm mỏng dài vô hạn trên nền Winkler và nền hai thông số chịu tác dụng đồng thời của tải trọng nền tĩnh và tải trọng chuyển động. Sun³ đã sử dụng phép biến đổi Fourier để tìm lời giải giải tích cho bài toán tấm Kirchhoff trên nền đàn nhớt chịu tải trọng di động điều hòa dạng đường tròn. Xiang và cộng sự⁴ đã cung cấp lời giải chính xác cho bài toán dao động tấm dày với bốn cạnh tựa đơn đặt trên nền Pasternak. Bằng cách áp dụng một lý thuyết mới, Xing và Liu⁵ đã đề xuất lời giải cho bài toán dao động tự do của tấm Mindlin chữ nhật. Với những điều kiện biên phức tạp, Fan và Cheung⁶ đã sử dụng phương pháp dải hữu hạn để phân tích dao động tự do của tấm mỏng chữ nhật. Cũng bằng phương pháp dải hữu hạn, Huang và Thambiratnam⁷ phân tích ứng xử của tấm chữ nhật trên nền đàn hồi chịu tải di chuyển có gia tốc. Những nghiên cứu kể trên đều sử dụng phương pháp giải tích để đưa ra lời giải cho phương trình vi phân chủ đạo mô tả chuyển động tấm. Một phương pháp mới ưu việt hơn, tận dụng sức mạnh điện toán của máy tính đối với những tình huống phức tạp như hệ có nhiều bậc tự do hoặc tải có gia tốc tên là phương pháp phần tử hữu hạn FEM (Finite Element Method) đã được áp dụng vào nghiên cứu động lực học kết cấu. Filho⁸, Hino và cộng sự⁹ và Olsson¹⁰ là những nhà tiên phong trong việc phát triển FEM vào nghiên cứu bài toán kết cấu dầm chịu tải trọng động. Tiếp theo, có thể kể đến các công trình của Thambiratnam and Zhuge¹¹, Yoshida và Weaver¹², Wu và cộng sự¹³ đều sử dụng phương pháp FEM để phân tích động lực học kết cấu tấm. Koh và cộng sự¹⁴ đã chỉ ra những khuyết điểm của FEM khi giải quyết bài toán tải di chuyển và đề xuất một phương pháp cải tiến, tên là phương pháp phần tử chuyển động MEM (Moving Element Method) để giải bài toán tàu-ray 1 chiều. Từ những nghiên cứu trên cho thấy phương pháp MEM đã mang lại những lợi thế nhất

Trích dẫn bài báo này: Nam Hải T, Thị Thanh Quý N, Văn Hải L. **Phân tích ứng xử động của tấm nhiều lớp chịu tải trọng di chuyển với gia tốc thay đổi và ảnh hưởng nhiệt độ.** *Sci. Tech. Dev. J. - Eng. Tech.* 2025; 8(1):1-12.

định cho phân tích động. Các nghiên cứu sau đó áp dụng phương pháp MEM có thể kể đến các công trình của: Koh và cộng sự¹⁵, Xu và cộng sự¹⁶, Cao và cộng sự¹⁷ về kết cấu tấm.

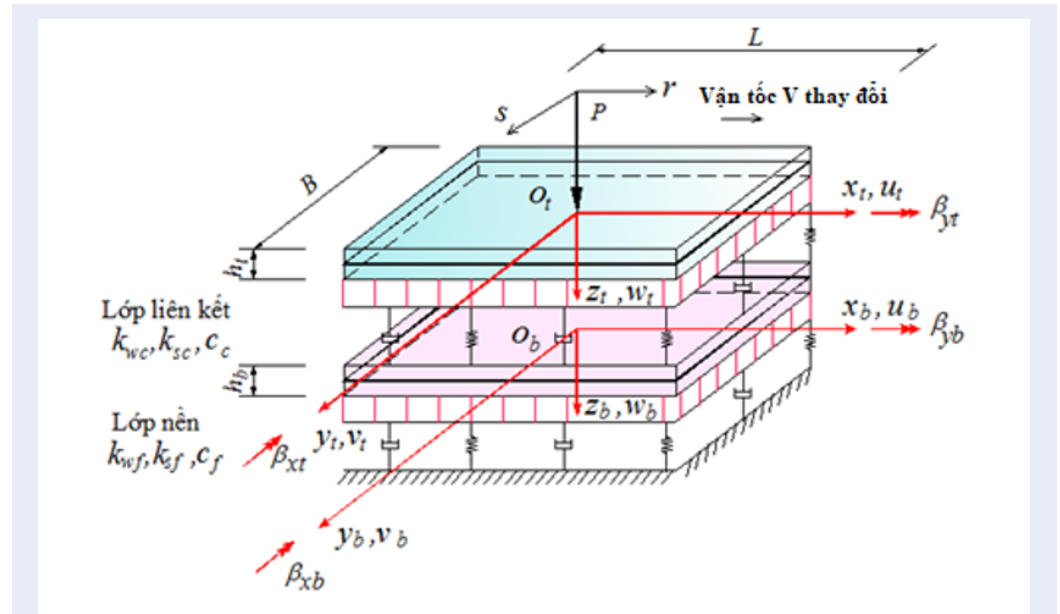
Hiện nay, tuy đã có một số nghiên cứu về kết cấu tấm sử dụng phương pháp phần tử chuyển động, nhưng chỉ dừng lại ở phân tích tĩnh đơn, một số nghiên cứu về tấm hai lớp thì không xét đến tác động của nhân tố nhiệt độ cũng như ảnh hưởng gia tốc tải trọng lên ứng xử của tấm. Vì vậy, bài báo này sẽ tập trung phát triển phương pháp MMPM để phân tích ứng xử động của tấm hai lớp trên nền Pasternak chịu tải trọng di chuyển có gia tốc và ảnh hưởng của nhiệt độ.

CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Tấm nhiều lớp đặt trên nền Pasternak

Mô hình vật lý

Xét mô hình tấm gồm hai lớp đồng nhất có kích thước được ký hiệu như sau: chiều dài L và chiều rộng B ; tấm trên có bề dày h_t và tấm dưới có bề dày h_b . Tấm nhiều lớp được liên kết với nhau bằng lớp Pasternak với các thông số độ cứng k_{wc} , hệ số kháng cắt k_{sc} và hệ số cản c_c . Tấm dưới được đặt trên nền Pasternak có độ cứng k_{wf} , hệ số kháng cắt k_{sf} và hệ số cản c_f . Gọi u_{0t} , v_{0t} , w_{0t} và u_{0b} , v_{0b} , w_{0b} lần lượt là các chuyển vị theo phương x , y , z của một điểm tại mặt trung hòa của tấm trên và tấm dưới; β_{xt} , β_{yt} và β_{xb} , β_{yb} là các góc xoay xung quanh trục y và x . Ký hiệu T_{tt} và T_{bb} lần lượt là nhiệt độ của **tấm trên và tấm dưới**. Tải tập trung P di chuyển dọc trục x của tấm với vận tốc thay đổi được thể hiện ở Hình 1.



Hình 1: Mô hình tấm hai lớp đặt **trên nền** Pasternak

Mối quan hệ biến dạng và ứng suất xét ảnh hưởng của nhiệt độ

Giả sử rằng trường nhiệt độ không đổi trong mặt phẳng O_{xy} của tấm và chỉ biến thiên theo phương bề dày tấm. Giải phương trình vi phân mô tả phân bố nhiệt độ theo bề dày tấm của hàm phân bố nhiệt độ được biểu diễn như sau:

$$-\frac{d}{dz} \left(K \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (1)$$

trong đó K là hệ số truyền nhiệt của tấm và là hằng số trong trường hợp tấm đồng nhất.

Điều kiện biên được xem xét ở phương trình (1) như sau:

Tấm trên:

$$T = T_{tt}(z = h_t/2); T = T_{tb}(z = -h_t/2) \quad (2)$$

Tấm dưới:

$$T = T_{bt}(z = h_b/2); T = T_{bb}(z = -h_b/2) \quad (3)$$

Hàm nhiệt độ là các đa thức bậc nhất được thể hiện theo công thức sau:

$$T(z_t) = T_{tb} + (T_{tt} - T_{tb}) \left(\frac{z_t}{h_t} + \frac{1}{2} \right)$$

$$T(z_b) = T_{bb} + (T_{bt} - T_{bb}) \left(\frac{z_b}{h_b} + \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

Nhiệt độ tại vị trí nối tiếp giữa tấm trên và tấm dưới được cho bởi công thức:

$$T_{tb} = T_{bt} = T_{tt} - \frac{(T_{tt} - T_{bb})}{\frac{h_t}{\kappa_t} + \frac{h_b}{\kappa_b}} \frac{h_t}{\kappa_t} = T_{bb} + \frac{(T_{tt} - T_{bb})}{\frac{h_t}{\kappa_t} + \frac{h_b}{\kappa_b}} \frac{h_b}{\kappa_b} \quad (5)$$

trong đó T_{tt} , T_{bb} lần lượt là nhiệt độ tại các mặt biên của tấm trên và tấm dưới; T_{tb} là nhiệt độ tại mặt dưới của tấm trên và T_{bt} là nhiệt độ tại mặt trên của tấm dưới; κ_t và κ_b lần lượt là hệ số truyền nhiệt của tấm trên và tấm dưới h_t và h_b là bề dày tấm trên và tấm dưới.

Theo Yang và Shen¹⁸, mô-đun đàn hồi E và hệ số giãn nở nhiệt α của tấm trên và tấm dưới biến thiên theo nhiệt độ tuyệt đối như sau:

$$E_t(T) = E_0^t \left(E_{-1}^t T^{-1} + 1 + E_1^t T^1 + E_2^t T^2 + E_3^t T^3 \right)$$

$$E_b(T) = E_0^b \left(E_{-1}^b T^{-1} + 1 + E_1^b T^1 + E_2^b T^2 + E_3^b T^3 \right) \quad (6)$$

$$\alpha_t(T) = \alpha_0^t \left(\alpha_{-1}^t T^{-1} + 1 + \alpha_1^t T^1 + \alpha_2^t T^2 + \alpha_3^t T^3 \right)$$

$$\alpha_b(T) = \alpha_0^b \left(\alpha_{-1}^b T^{-1} + 1 + \alpha_1^b T^1 + \alpha_2^b T^2 + \alpha_3^b T^3 \right)$$

Trong đó: E_0^t , E_{-1}^t , E_1^t , E_2^t , E_3^t , α_0^t , α_{-1}^t , α_1^t , α_2^t , α_3^t là các hằng số vật liệu tấm trên E_0^b , E_{-1}^b , E_1^b , E_2^b , E_3^b , α_0^b , α_{-1}^b , α_1^b , α_2^b , α_3^b là các hằng số vật liệu tấm dưới; T là nhiệt độ tuyệt đối (đo theo thang Kelvin-K).

Theo đó, mô-đun đàn hồi E và hệ số giãn nở nhiệt thay đổi theo chiều dày tấm như sau:

$$E(z_t) = (E_{tt}(T) - E_{tb}(T)) \left(\frac{z_t}{h_t} + \frac{1}{2} \right) + E_{tb}(T)$$

$$E(z_b) = (E_{bt}(T) - E_{bb}(T)) \left(\frac{z_b}{h_b} + \frac{1}{2} \right) + E_{bb}(T) \quad (7)$$

$$\alpha(z_t) = (\alpha_{tt}(T) - \alpha_{tb}(T)) \left(\frac{z_t}{h_t} + \frac{1}{2} \right) + \alpha_{tb}(T)$$

$$-\alpha(z_b) = (\alpha_{bt}(T) - \alpha_{bb}(T)) \left(\frac{z_b}{h_b} + \frac{1}{2} \right) + \alpha_{bb}(T)$$

Trường biến dạng của tấm khi kể đến nhiệt độ có công thức sau đây

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \varepsilon_m + z \kappa \quad (8)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{0,x} \\ \beta_y + w_{0,y} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Với điều kiện trường biến dạng được phát biểu theo nguyên lý chống chất như sau:

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_T \quad (10)$$

trong đó ε_m là trường biến dạng cơ học; ε_T là trường biến dạng do nhiệt độ

$$\varepsilon_T = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha(z, T) \Delta T \quad (11)$$

Trường ứng suất của tấm được thể hiện như sau:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha(z, T) \Delta T \quad (12)$$

$$\tau = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

trong đó Q_{11} , Q_{12} , Q_{21} , Q_{22} , Q_{44} , Q_{55} , Q_{66} là các hằng số vật liệu của tấm.

Ngoại lực sinh ra bởi nhiệt độ được thể hiện như công thức sau:

$$\begin{bmatrix} N_x^T & M_x^T \\ N_y^T & M_y^T \\ N_{xy}^T & M_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(z) \\ \alpha(z) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \Delta T dz$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{E(z)\alpha(z)\Delta T}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} dz \quad (14)$$

Phương trình chủ đạo

Phương trình chủ đạo của tấm nhiều lớp được thiết lập bằng nguyên lý công ảo cho tấm trên và tấm dưới.

Sau đây, công nội ảo của tấm trên và tấm dưới được viết lần lượt như sau:

$$\partial W_t = \int_{\Omega_t} \left\{ (\partial \varepsilon_{mt})^T \quad (\partial \kappa_t)^T \quad (\partial \gamma_t)^T \right\} \begin{bmatrix} D_{mt} & D_{mbt} & 0 \\ D_{mbt} & D_{bt} & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mt} \\ \kappa_t \\ \gamma_t \end{Bmatrix} d\Omega_t \quad (15)$$

$$\partial W_b = \int_{\Omega_b} \left\{ (\partial \varepsilon_{mb})^T \quad (\partial \kappa_b)^T \quad (\partial \gamma_b)^T \right\} \begin{bmatrix} D_{mb} & D_{mbb} & 0 \\ D_{mbb} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{sb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mb} \\ \kappa_b \\ \gamma_b \end{Bmatrix} d\Omega_b \quad (16)$$

với D_{mt} , D_{mb} là ma trận vật liệu cho biến dạng màng,

D_{mbt} , D_{mbb} là ma trận vật liệu cho biến dạng màng và biến dạng uốn,

D_{bt} , D_{bb} là ma trận vật liệu cho biến dạng uốn,

D_{st} , D_{sb} là những ma trận vật liệu cho biến dạng cắt,

$K_s = \frac{5}{6}$ là hệ số hiệu chỉnh cắt là $K_s = \frac{5}{6}$.

Công ngoại ảo của tấm trên nền Pasternak được viết như sau:

$$\partial W_E = \partial W_E^P + \partial W_E^m + \partial W_E^k + \partial W_E^{ks} + \partial W_E^c \quad (17)$$

với ∂W_E^P - công ngoại ảo do tải di chuyển được cho như sau:

$$\partial W_E^P = \int_{\Omega} (\partial u)^T b d\Omega \quad (18)$$

b - véc-tơ tải tác dụng lên tấm:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P\delta(x-S)\delta(y-0) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

trong đó P là độ lớn tải di động, S là quãng đường tải di chuyển và $\delta()$ là hàm the Dirac - Delta.

∂W_E^m là công ngoại ảo do lực quán tính:

$$\partial W_E^m = - \int_{\Omega} (\partial u)^T m \ddot{u} d\Omega \quad (20)$$

∂W_E^{kw} là công ngoại ảo do lực đàn hồi của nền Pasternak:

$$\partial W_E^{kw} = - \int_{\Omega} \partial w^T k_w w d\Omega \quad (21)$$

∂W_E^{ks} là công ngoại ảo do lực kháng cắt của nền Pasternak:

$$\partial W_E^{ks} = \int_{\Omega} \partial w^T k_s \nabla^2 w d\Omega \quad (22)$$

∂W_E^c là công ngoại ảo do lực cản của nền Pasternak:

$$\partial W_E^c = - \int_{\Omega} \partial w^T c w d\Omega \quad (23)$$

Phương trình chuyển động của tấm nhiều lớp từ cân bằng công nội ảo và công ngoại ảo được thiết lập như sau:

- Tấm trên:

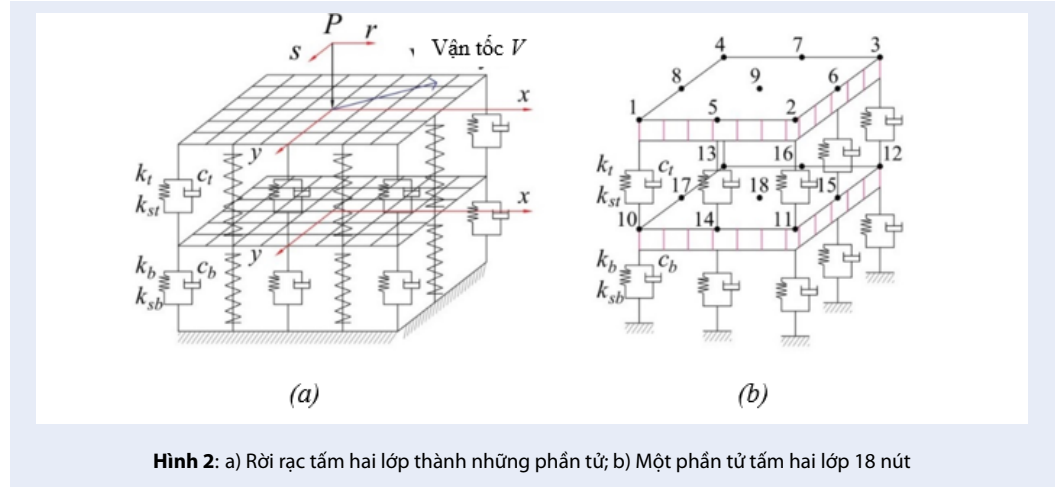
$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left((\delta \varepsilon_{mt})^T \quad (\delta \kappa_t)^T \quad (\delta \gamma_t)^T \right) \begin{bmatrix} D_{mt} & D_{mbt} & 0 \\ D_{bmt} & D_{bt} & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{mt} \\ \kappa_t \\ \gamma_t \end{bmatrix} d\Omega_t \\ & + \int_{\Omega_t} \delta u_t^T m_t \ddot{u}_t d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \delta w_t^T k_{wc} (w_t - w_b) d\Omega_t \\ & - \int_{\Omega_t} \delta w_t^T k_{sc} (\nabla^2 w_t - \nabla^2 w_b) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \delta w_t^T c_c (\dot{w}_t - \dot{w}_b) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \delta u_t^T b_t d\Omega_t \end{aligned} \quad (24)$$

- Tấm dưới:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_b} \left((\delta \varepsilon_{mb})^T \quad (\delta \kappa_b)^T \quad (\delta \gamma_b)^T \right) \begin{bmatrix} D_{mb} & D_{mbb} & 0 \\ D_{bmb} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{sb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{mb} \\ \kappa_b \\ \gamma_b \end{bmatrix} d\Omega_b \\ & + \int_{\Omega_b} \delta u_b^T m_b \ddot{u}_b d\Omega_b - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{wc} (w_t - w_b) d\Omega_b + \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{sc} (\nabla^2 w_t - \nabla^2 w_b) d\Omega_b \\ & - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T c_c (\dot{w}_t - \dot{w}_b) d\Omega_b + \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{wf} w_b d\Omega_b - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{sf} \nabla^2 w_b d\Omega_b - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T c_f \dot{w}_b d\Omega_b = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Phương pháp tấm nhiều lớp chuyển động

Tấm hai lớp được rời rạc thành các phần tử theo Phần tử tứ giác 9 nút (Quadrilateral Nine-Node Element - Q9), như trong Hình 2.



Hình 2: a) Rời rạc tấm hai lớp thành những phần tử; b) Một phần tử tấm hai lớp 18 nút

Khi tải trọng chuyển động với vận tốc ban đầu V_0 và gia tốc a thì mối quan hệ giữa hệ (r, s) và (x, y) được viết như sau:

$$\begin{cases} r = x - V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ s = y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial t} = -(V_0 + a t) = -v \quad (16)$$

trong đó $v = V_0 + a t$ là vận tốc của tải trọng tại thời điểm t .

Từ đó, phương trình chuyển động của tấm trên (25) được viết lại trong hệ (r, s) như sau:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \{ (\delta \varepsilon_{mt})^T (\delta K_t)^T (\delta \gamma_t)^T \} \begin{bmatrix} D_{mt} & D_{mbt} & 0 \\ D_{bmt} & D_{bt} & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mt} \\ K_t \\ \gamma_t \end{Bmatrix} drds \\ & + \int_{\Omega_t} \delta u^T t m_t \left(v^2 \frac{\partial^2 u_t(r,s)}{\partial r^2} - 2v \frac{\partial^2 u_t(r,s)}{\partial r \partial t} - \alpha \frac{\partial u_t(r,s)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_t(r,s)}{\partial t^2} \right) drds \\ & + \int_{\Omega_t} \delta w_t^T k_t (w_t - w_b) drds - \int_{\Omega_t} \delta w^T k_{st} (\nabla^2 w_t - \nabla^2 w_b) drds \\ & + \int_{\Omega_t} \delta w_t^T c_t \left(v \frac{\partial w_t(r,s)}{\partial t} - \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} + v \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} \right) drds = \int_{\Omega_t} \delta u^T t b_t(r,s) drds \end{aligned} \quad (27)$$

Tương tự, phương trình chuyển động của tấm dưới (36) được viết trong hệ (r, s) như sau:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_b} \{ (\delta \varepsilon_{mb})^T (\delta K_b)^T (\delta \gamma_b)^T \} \begin{bmatrix} D_{mb} & D_{mbb} & 0 \\ D_{bmb} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{sb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mb} \\ K_b \\ \gamma_b \end{Bmatrix} drds \\ & + \int_{\Omega_b} \delta u^T b m_b \left(v^2 \frac{\partial^2 u_b(r,s)}{\partial r^2} - 2v \frac{\partial^2 u_b(r,s)}{\partial r \partial t} - \alpha \frac{\partial u_b(r,s)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_b(r,s)}{\partial t^2} \right) drds - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_t (w_t - w_b) drds \\ & + \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{st} (\nabla^2 w_t - \nabla^2 w_b) drds - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T c_t \left(v \frac{\partial w_t(r,s)}{\partial t} - \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} + v \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} \right) drds \\ & + \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_b w_b drds - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{sb} \nabla^2 w_b drds - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T b c_b \left(\frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} - v \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial r} \right) drds = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Phương trình chuyển động tổng quát tấm hai lớp đạt được bằng cách ghép nối tất cả các ma trận phần tử:

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = P \quad (29)$$

với $\ddot{d}, \dot{d}$ và lần lượt kí hiệu véc-tơ gia tốc nút tổng thể, véc-tơ vận tốc nút tổng thể và véc-tơ chuyển vị nút tổng thể; M, C và K là ma trận khối lượng tổng thể, ma trận cản tổng thể và ma trận độ cứng tổng thể. Phương pháp Newmark được sử dụng trong bài báo để giải phương trình (30) cho các khảo sát ứng xử động của tấm nhiều lớp.

Ma trận phần tử tấm hai lớp đạt được bằng cách ghép nối ma trận phần tử tấm trên và tấm dưới như sau:

$$M^{(e)} = M_t^{(e)} + M_b^{(e)}; C^{(e)} = C_t^{(e)} + C_b^{(e)}; K^{(e)} = K_t^{(e)} + K_b^{(e)}; P^{(e)} = P_t^{(e)} + P_b^{(e)} \quad (30)$$

$M_t^{(e)}$ là ma trận khối lượng phần tử tấm trên:

$$M_t^{(e)} = m_t \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T N_t det J d\xi d\eta \quad (31)$$

$C_t^{(e)}$ là ma trận cản phần tử tấm trên:

$$\begin{aligned} C_t^{(e)} = & -2m_t V \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T N_{t,r} det J d\xi d\eta + c_c \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wt} det J d\xi d\eta \\ & - c_c \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wb} det J d\xi d\eta \end{aligned} \quad (32)$$

$K_t^{(e)}$ là ma trận độ cứng phần tử tấm trên:

$$\begin{aligned} K_t^{(e)} = & \int_{\Omega_t^{(e)}} \left((B_{mt})^T \quad (B_{bt})^T \quad (B_{st})^T \right) \begin{bmatrix} D_{mt} & D_{mbt} & 0 \\ D_{bmt} & D_{bt} & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{mt} \\ B_{bt} \\ B_{st} \end{Bmatrix} det J d\xi d\eta \\ & - m_t a \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T N_{t,r} det J d\xi d\eta + m_t V^2 \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T N_{t,rr} det J d\xi d\eta + k_{wc} \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wt} det J d\xi d\eta - \\ & k_{wc} \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wb} det J d\xi d\eta \\ & - k_{sc} \int_{\Omega_t^{(e)}} (N_{wt}^T N_{wt,rr} + N_{wt}^T N_{wt,ss}) det J d\xi d\eta \\ & + k_{sc} \int_{\Omega_t^{(e)}} (N_{wt}^T N_{wb,rr} + N_{wt}^T N_{wb,ss}) det J d\xi d\eta \\ & - c_c V \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wt,r} det J d\xi d\eta + c_c V \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb,r} det J d\xi d\eta \end{aligned} \quad (33)$$

$P_t^{(e)}$ là véc-tơ tải phần tử tấm trên:

$$P_t^{(e)} = \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T b(r,s) det J d\xi d\eta - \int_{\Omega_t^{(e)}} \left((B_{mt})^T \begin{Bmatrix} N_{xt}^T \\ N_{yt}^T \\ N_{xyt}^T \end{Bmatrix} + (B_{bt})^T \begin{Bmatrix} M_{xt}^T \\ M_{yt}^T \\ M_{xyt}^T \end{Bmatrix} \right) det J d\xi d\eta \quad (34)$$

$M_b^{(e)}$ là ma trận khối lượng phần tử tấm dưới:

$$M_b^{(e)} = m_b \int_{\Omega_b^{(e)}} N_b^T N_b det J d\xi d\eta \quad (35)$$

$C_b^{(e)}$ là ma trận cản phần tử tấm dưới:

$$C_b^{(e)} = -2m_b V \int_{\Omega_b^{(e)}} N_b^T N_{b,r} det J d\xi d\eta + c_f \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb} det J d\xi d\eta$$

$$+ c_c \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb} \det J d\xi d\eta - c_c \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wt} \det J d\xi d\eta \quad (36)$$

$K_b^{(e)}$ là ma trận độ cứng phần tử tấm dưới:

$$K_b^{(e)} = \int_{\Omega_b^{(e)}} \left(\begin{matrix} (B_{mb})^T & (B_{bb})^T & (B_{sb})^T \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} D_{mb} & D_{mbb} & 0 \\ D_{bmb} & D_{bbb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{sb} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} B_{mb} \\ B_{bb} \\ B_{sb} \end{matrix} \right) \det J d\xi d\eta$$

$$- m_b a \int_{\Omega_b^{(e)}} N_b^T N_{b,r} \det J d\xi d\eta + m_b V^2 \int_{\Omega_b^{(e)}} N_b^T N_{b,rr} \det J d\xi d\eta$$

$$+ k_{wf} \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb} \det J d\xi d\eta - c_f V \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb,r} \det J d\xi d\eta$$

$$- k_{sf} \int_{\Omega_b^{(e)}} (N_{wb}^T N_{wb,rr} + N_{wb}^T N_{wb,ss}) \det J d\xi d\eta$$

$$+ k_{wc} \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb} \det J d\xi d\eta - k_{wc} \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wt} \det J d\xi d\eta$$

$$- k_{sc} \int_{\Omega_b^{(e)}} (N_{wb}^T N_{wb,rr} + N_{wb}^T N_{wb,ss}) \det J d\xi d\eta + k_{sc} \int_{\Omega_b^{(e)}} (N_{wb}^T N_{wt,rr} + N_{wb}^T N_{wt,ss}) \det J d\xi d\eta$$

$$- c_c V \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb,r} \det J d\xi d\eta + c_c V \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wt,r} \det J d\xi d\eta \quad (37)$$

$P_b^{(e)}$ là véc-tơ tải phần tử tấm dưới:

$$P_b^{(e)} = - \int_{\Omega_b^{(e)}} \left(\begin{matrix} ((B_{mb})^T)^T \\ ((B_{bb})^T)^T \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} N_{xb}^T \\ N_{yb}^T \\ N_{xyb}^T \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} M_{xb}^T \\ M_{yb}^T \\ M_{xyb}^T \end{matrix} \right) \det J d\xi d\eta \quad (38)$$

KẾT QUẢ SỐ

Kiểm chứng

Bài toán tĩnh

Mô hình được kiểm chứng với bài toán tấm hai lớp chịu tải trọng tĩnh, đặt trên nền Pasternak hai thông số, kết quả thu được sẽ được kiểm chứng với số liệu trong công trình của Wu và cộng sự¹⁹. Nhiệt độ mặt trên và mặt dưới tấm bằng nhau $T_t = T_{bb}$. Kích thước tấm hai lớp có kích thước như sau $L \times B = 3.75\text{m} \times 4.5\text{m}$ với chiều dày tấm trên $h_t = 0.22$ và chiều dày tấm dưới $h_b = 0.18\text{m}$. Thông số vật liệu tấm nhiều lớp lần lượt là $E_t = 3.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu_t = 0.15$, $\rho_t = 2400 \text{ kg/m}^3$ cho tấm trên, và $E_b = 1.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu_b = 0.25$, $\rho_b = 2300 \text{ kg/m}^3$ cho tấm dưới. Thông số lớp liên kết: $k_{wc} = 1.72 \times 10^8 \text{ N/m}^3$, $k_{sc} = 0$, $c_c = 1.75 \times 10^5 \text{ N.s/m}^3$ và thông số nền $k_{wf} = 1.52 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, $k_{sf} = 0$, $c_f = 3.79 \times 10^6 \text{ N.s/m}^3$. Tải trọng tập trung có độ lớn là $1 \times 10^5 \text{ N}$ và lưới chia là 20×20 . Bảng 1 so sánh chuyển vị lớn nhất tấm trên từ mô hình đề xuất với số liệu của Wu và cộng sự²⁰ với sai số 0.98%. Kết luận, phương pháp MMPM đối với bài toán tĩnh cho ra kết quả đáng tin cậy.

Bảng 1: Chuyển vị lớn nhất của tấm trên

Nguồn	Chuyển vị lớn nhất (mm)
Wu và cộng sự ¹⁹	0.3562
Mô hình đề xuất	0.3527
Sai khác (%)	0.98

Bài toán động

Tiếp theo, mô hình được kiểm chứng với tải trọng động di chuyển dọc theo giữa tấm phương x của tấm trên. Kết quả thu được từ mô hình được so sánh với số liệu trong nghiên cứu của Cao và cộng sự¹⁷ và Huang và Thambiratnam²⁰. Kích thước tấm hai lớp như sau $L \times B = 40\text{m} \times 10\text{m}$, chiều dày tấm trên và tấm dưới như nhau $h_t = h_b = 0.3\text{m}$. Thông số vật liệu tấm trên, và tấm dưới là $E_t = E_b = 3.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu_t = \nu_b = 0.25$, $\rho_t = \rho_b = 2440 \text{ kg/m}^3$. Thông số lớp liên kết $k_{wc} = 1 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, $k_{sc} = 0$, $c_c = 0$ và thông số nền $k_{wf} = \infty$, $k_{sf} = 0$, $c_f = 0$. Tải trọng động có độ lớn là $1 \times 10^3 \text{ N}$ với vận tốc không đổi $V = 20 \text{ m/s}$. Nhiệt độ hai mặt của tấm như nhau $T_t = T_{bb}$. Nghiên cứu xem xét tính hội tụ của chuyển vị tại tâm tấm bằng cách sử dụng những lưới chia khác nhau và cùng một bước thời gian $\Delta t = 0.0025(\text{s})$. Bảng 2 ghi nhận kết quả chuyển vị của tấm tấm trên và tấm dưới, và so sánh với nghiên cứu của Cao và cộng sự¹⁷. Nhận thấy sự sai khác giữa mô hình đề xuất và nghiên cứu¹⁷ là không đáng kể, phương pháp MMPM trong bài báo cho ra các kết quả ở bài toán động ở các lưới chia khác nhau là đáng tin cậy.

Bảng 2: Hội tụ chuyển vị tâm tấm với những lưới chia khác nhau

Lưới chia	Tấm trên/dưới	Mô hình đề xuất (mm)	Cao và cộng sự [17] (mm)	Sai khác (%)
15 x 5	Trên	-4.3284×10^{-3}	-4.2741×10^{-3}	1.25
	Dưới	-4.3284×10^{-12}	-4.2741×10^{-12}	1.25
20 x 10	Trên	-4.4880×10^{-3}	-4.4356×10^{-3}	1.17
	Dưới	-4.4880×10^{-12}	-4.4356×10^{-12}	1.17
30 x 15	Trên	-4.7103×10^{-3}	-4.6559×10^{-3}	1.15
	Dưới	-4.7103×10^{-12}	-4.6559×10^{-12}	1.15

Kết quả nghiên cứu & thảo luận

Khảo sát ảnh hưởng của tấm nhiều lớp dưới tác động của nhiệt độ

Xét mô hình tấm hai lớp có kích thước $L \times B = 20\text{m} \times 10\text{m}$, chiều dày tấm trên tấm dưới như nhau $h_t = h_b = 0.1\text{m}$, hệ số Poisson $\nu = 0.2$ và bốn cạnh tựa đơn. Các thông số vật liệu được trình bày trong Bảng 3. Thông số lớp liên kết và nền $k_{wc} = k_{wf} = 1 \times 10^7 \text{N/m}^3$, $k_{sc} = k_{sf} = 1 \times 10^5 \text{N/m}^3$, $c_c = c_f = 1 \times 10^4 \text{N/m}^3$. Tấm chịu tải trọng tập trung $P = 1 \times 10^6 \text{N}$ di chuyển với vận tốc $V = 20\text{m/s}$, gia tốc $a = 20\text{m/s}^2$. Khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ tới độ võng tại tâm tấm với $T_{tt} = T_{bb}$ và sau đó tăng dần nhiệt độ mặt trên $T_{tt} = 400\text{K}, 500\text{K}, 600\text{K}$ trong khi nhiệt độ mặt dưới ở 300K .

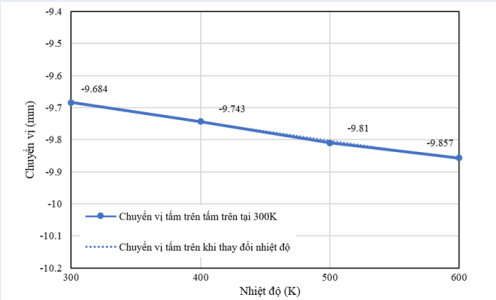
Bảng 3: Thông số vật liệu tấm

Vật liệu	Thông số	E0	E-1	E1	E2	E3	E (300K)
Tấm trên	E (Pa)	3.49×10^{11}	0	-3.07×10^{-4}	2.16×10^{-7}	-8.95×10^{-11}	3.22×10^{11}
	α (1/K)	5.87×10^{-6}	0	9.10×10^{-4}	0	0	7.48×10^{-6}
	ρ (kg/m3)	-	-	-	-	-	2370
	k (W/mK)	-	-	-	-	-	9.19
Tấm dưới	E (Pa)	2.01×10^{11}	0	3.08×10^{-4}	-6.53×10^{-7}	0	2.08×10^{11}
	α (1/K)	1.23×10^{-5}	0	8.09×10^{-4}	0	0	1.53×10^{-5}
	ρ (kg/m3)	-	-	-	-	-	8166
	k (W/mK)	-	-	-	-	-	12.04

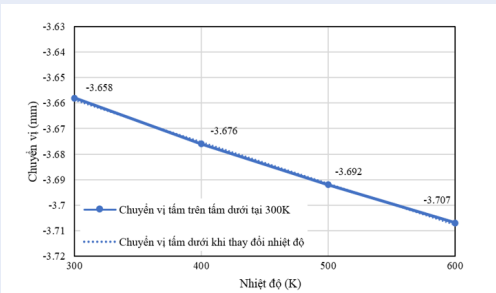
Dữ liệu Bảng 4 và biểu đồ theo Hình 3 và Hình 4 cho thấy chuyển vị lớn nhất tại tâm tấm trên và dưới tăng dần khi chênh lệch nhiệt độ giữa hai mặt tấm tăng, ngoài ra sự tăng chuyển vị này gần như tuyến tính. Tóm lại, nhiệt độ thực sự gây ra những tác động lên ứng xử kết cấu cùng với tải trọng cơ học, nhưng tùy vật liệu với các hệ số dẫn nhiệt khác nhau sẽ có tác động khác nhau lên kết cấu. Trong nghiên cứu này, chuyển vị của tấm bị ảnh hưởng chủ yếu do tải trọng cơ học, tác động nhiệt độ có tham gia nhưng không đáng kể.

Bảng 4: Chuyển vị của tấm khi nhiệt độ tác dụng lên mặt trên thay đổi

Nhiệt độ mặt trên T_{tt} (K)	300	400	500	600
Chuyển vị tấm trên (mm)	-9.684	-9.743	-9.810	-9.857
Chênh lệch so với 300K (%)		0.06	1.29	1.79
Chuyển vị tấm dưới (mm)	-3.658	-3.676	-3.692	-3.707
Chênh lệch so với 300K (%)		0.47	0.91	1.34



Hình 3: Chuyển vị lớn nhất của tấm trên khi nhiệt độ **tác dụng** lên mặt trên thay đổi



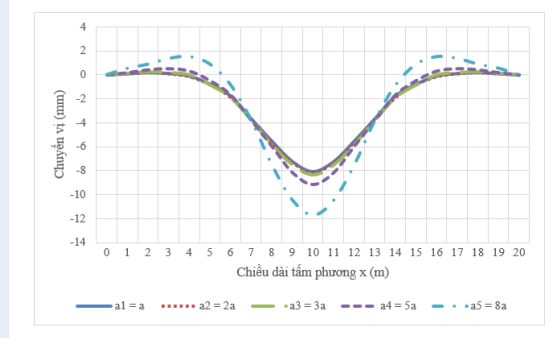
Hình 4: Chuyển vị lớn nhất của tấm dưới khi nhiệt độ **tác dụng** lên mặt trên thay đổi

Khảo sát ảnh hưởng của tấm nhiều lớp dưới sự thay đổi gia tốc của tải động

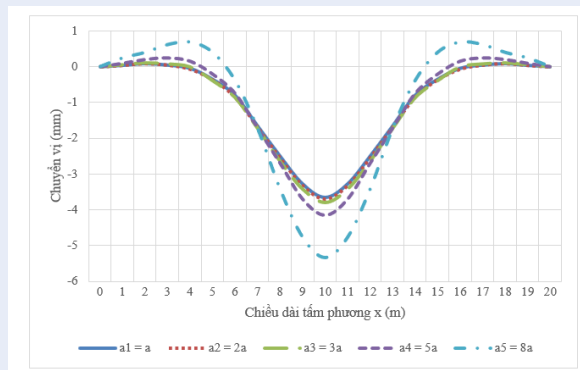
Xét mô hình tấm hai lớp có kích thước $L \times B = 20\text{m} \times 10\text{m}$, chiều dày tấm trên và tấm dưới $h_t = h_b = 0.1\text{m}$, hệ số Poisson $\nu = 0.3$, bốn cạnh tựa đơn. Tấm chịu tải trọng tập trung $P = 1 \times 10^6\text{N}$ di chuyển với vận tốc ban đầu $V_0 = 20\text{m/s}$, nhiệt độ mặt trên tấm $T_{tt} = 400\text{K}$ và nhiệt độ mặt dưới tấm $T_{bb} = 300\text{K}$. Các thông số vật liệu được trình bày trong Bảng 3. Thông số lớp liên kết và nền $k_{wc} = k_{wf} = 1 \times 10^7\text{N/m}^3$, $k_{sc} = k_{sf} = 1 \times 10^5\text{N/m}^3$, $c_c = c_f = 1 \times 10^4\text{N/m}^3$. Khảo sát ảnh hưởng của gia tốc tải di chuyển đến ứng xử tấm trong các trường hợp sau $a_1 = a = 20\text{m/s}^2$, $a_2 = 2a$, $a_3 = 3a$, $a_4 = 5a$, $a_5 = 8a$.
Kết quả từ Hình 5 và Hình 6 thu được tại thời điểm $t = 1.00\text{s}$, cho thấy khi gia tốc tải di chuyển tăng thì chuyển vị tấm trên và tấm dưới cũng tăng theo. Ảnh hưởng của gia tốc tới chuyển vị khi $\alpha \leq 60\text{m/s}^2$ là không rõ ràng, khi $\alpha > 60\text{m/s}^2$ thì chuyển vị bắt đầu tăng nhanh. Điều này phù hợp với tính chất vật lý của kết cấu là khi lực chuyển động càng nhanh thì tác động của lực lên chuyển vị tấm càng lớn.

KẾT LUẬN

Bài báo sử dụng phương pháp số mới MMPM để mô phỏng và phân tích ứng xử động của tấm nhiều lớp trên nền Pasternak chịu tải di chuyển có gia tốc và sự thay đổi nhiệt độ tấm. Phương trình chủ đạo được thiết lập



Hình 5: Chuyển vị tấm trên với những giá trị gia tốc khác nhau



Hình 6: Chuyển vị tấm dưới với những giá trị gia tốc khác nhau

bằng nguyên lý công ảo, sau đó, tấm được rời rạc thành những phần tử 9 nút theo phương pháp MMPM giúp đạt được kết quả chính xác. Điểm nổi bật của nghiên cứu này là gia tốc thay đổi và ảnh hưởng nhiệt độ được xét đến đồng thời trong phân tích như thể hiện đúng các kết cấu tấm ngoài thực tế như đường cao tốc, đường sân bay,... Độ tin cậy của nghiên cứu được kiểm chứng qua các công trình đã xuất bản sử dụng phương pháp truyền thống FEM. Bài báo đã thu được những giá trị trong phân tích ứng xử động tấm nhiều lớp dưới tác động tải di chuyển có giá trị gia tốc khác nhau cùng với sự chênh lệch nhiệt độ giữa mặt trên và mặt dưới của tấm. Kết quả cho thấy gia tốc tải là một yếu tố có ảnh hưởng đáng kể đến chuyển vị tấm vì có tác động đến sự giảm độ cứng và độ cản của tấm và làm tăng chuyển vị tại tâm tấm. Đối với ảnh hưởng của nhiệt độ, tuy có sự gia tăng chuyển vị tại tâm tấm khi tăng nhiệt độ chênh lệch tại mặt tấm trên và tấm dưới, nhưng kết quả cho thấy sự ảnh hưởng này không đáng kể. Tóm lại, khảo sát của bài báo đem lại giá trị trong thiết kế kết cấu tấm nhiều lớp cũng như các kết cấu tương tự khi xem xét các yếu tố như gia tốc tải hay nhiệt độ ảnh hưởng đến sự phá hủy của kết cấu.

DANH MỤC TỪ VIẾT TẮT

MEM: Phương pháp phần tử chuyển động (Moving Element Method)
 MMPM: Phương pháp phần tử hai lớp chuyển động (Multi-Layer Moving Plate Method)
 FEM: Phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method)
 Q9: Phần tử tứ giác 9 nút (Quadrilateral Nine-Node Element)

XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

Tác giả không có bất kỳ xung đột lợi ích nào trong công bố bài báo.

ĐÓNG GÓP CỦA TÁC GIẢ

Từ việc áp dụng phương pháp phần tử tấm nhiều lớp chuyển động để phân tích kết cấu tấm dưới tác dụng của tải trọng thay đổi gia tốc và nhiệt độ. Từ đó, bài báo cho thấy sự tác động của yếu tố gia tốc của tải trọng và nhiệt độ cùng gây ra ảnh hưởng đáng kể đến chuyển vị của tấm.

Trần Nam Hải: Thiết lập phương trình chuyển động giữa tấm và tải trọng và cùng viết bản thảo.

Nguyễn Thị Thanh Quý: Khảo sát, phân tích kết quả và cùng viết bản thảo.

Lương Văn Hải: Định hướng, xây dựng phương pháp MMPM cho các trường hợp khảo sát và cùng viết bản thảo.

CÁM ƠN

Nghiên cứu được tài trợ bởi Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) trong khuôn khổ Đề tài mã số B2024-20-12: “Mô hình và phân tích động lực học kết cấu tấm dầy ứng dụng trong các công trình xây dựng”.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Kim SM, Roesset JM. Moving loads on a plate on elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics*;124(9):1010–1017.
2. Kim SM. Buckling and vibration of a plate on elastic foundation subjected to in-plane compression and moving loads. *International Journal of Solids and Structures*;41(20):5647–5661.
3. Sun L. Dynamic response of Kirchhoff plate on a viscoelastic foundation to harmonic circular loads. *Journal of Applied Mechanics*;70:595–600.
4. Xiang Y, Wang CM, Kitipornchai S. Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak foundations. *Int J Mech Sci*;36(4):311–316.
5. Xing Y, Liu B. Closed form solutions for free vibrations of rectangular Mindlin plates. *Acta Mech Sin*;25:689–698.
6. Fan SC, Cheung YK. Flexural free vibrations of rectangular plates with complex support conditions. *Journal of Sound and Vibration*;93(1):81–94.
7. Huang MH, Thambiratnam DP. Deflection response of plate on Winkler foundation to moving accelerated loads. *Engineering Structures*;23:1134–1141.
8. Filho FV. Finite element analysis of structures under moving loads. *Shock and Vibration Digest*;10(8):27–35.
9. Hino J, Yoshimura T, Ananthanarayana N. Vibration analysis of non-linear beams subjected to moving load using the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*;100(4):477–491.
10. Olsson M. Finite element modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*;99(1):1–12.
11. Thambiratnam D, Zhuge Y. Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subject to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*;198(2):149–169.
12. Yoshida DM, Weaver W. Finite element analysis of beams and plates with moving load. *International Association for Bridge and Structural Engineering*;31(1):179–195.
13. Wu JS, Lee ML, Lai TS. The dynamic analysis of a flat plate under a moving load by the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*;24(4):743–762.
14. Koh CG, Ong JSY, Chua DKH. Moving element method for train-track dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*;56(11):1549–1567.
15. Koh CG, Sze PP, Deng TT. Numerical and analytical methods for in-plane dynamic response of annular disk. *International Journal of Solids and Structures*;43(1):112–131.
16. Xu WT, JH L, Zhang YH. 2D moving element method for random vibration analysis of vehicles on Kirchhoff plate with Kelvin foundation. *Latin American Journal of Solids and Structures*;6(2):169–183.
17. Cao TNT, Reddy JN, Lieu QX. A multi-layer moving plate method for dynamic analysis of viscoelastically connected double-plate systems subjected to moving loads. *Advances in Structural Engineering*;24(9):1798–1813.
18. Yang J, Shen HS. Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments. *Journal of Sound and Vibration*;255(3):579–602.
19. Wu J, Liang J, Adhikari S. Dynamic response of concrete pavement structure with asphalt isolating layer under moving load. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*;1(6):439–447.
20. Huang MH, Thambiratnam DP. Dynamic response of plates on elastic foundation to moving loads. *Journal of Engineering Mechanics*;128(9):1016–1022.

Dynamic analysis of a multilayer plate subjected to a moving concentrated load with various acceleration and temperature

Nam Hai Tran^{1,2}, Thi Thanh Quy Nguyen^{1,2}, Van Hai Luong^{1,2,*}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

¹Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Technology (HCMUT), 268 Ly Thuong Kiet Street, District 10, Ho Chi Minh City, Vietnam

²Vietnam National University Ho Chi Minh City, Linh Trung Ward, Thu Duc District, Ho Chi Minh City, Vietnam

Correspondence

Van Hai Luong, Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Technology (HCMUT), 268 Ly Thuong Kiet Street, District 10, Ho Chi Minh City, Vietnam

Vietnam National University Ho Chi Minh City, Linh Trung Ward, Thu Duc District, Ho Chi Minh City, Vietnam

Email: lvhai@hcmut.edu.vn

History

- Received: 01-01-2025
- Revised: 10-3-2025
- Accepted: 31-3-2025
- Published Online: 31-3-2025

DOI :



Copyright

© VNUHCM Press. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



ABSTRACT

The paper develops a new theory about numerical method to analyze dynamic behaviors of the multilayer plate which rested on a Pasternak foundation under the moving concentrated load with variable acceleration and temperature. The numerical method is developed by using the Multilayer Moving Plate Method (MMPM) in this paper. In addition, the Mindlin plate theory and the virtual work principle were applied to establish the governing equation of motion that can describe displacements of the multilayer plate as well as effects of the moving force to the structure. The multilayer plate is discretized into 9 Node-Lagrange by the MMPM which combined with element matrices into a global matrix to obtain the governing equation of motion for the plate structure. This governing equation of motion is solved by the Newmark method to produce convergent results. Then, the paper practices verification with results obtained the published papers regarding behaviour of plate under static and dynamic cases to demonstrate the reliability of results in this paper. Next, the paper examines behaviour of the multilayer plate under various acceleration to analyze the plate displacement. Subsequently, the influence of temperature on the plate to the displacement is considered by setting different temperature at the top plate and the bottom plates.

Key words: MMPM, moving load with acceleration, temperature.

Cite this article : Hai Tran N, Quy Nguyen T T, Hai Luong V. **Dynamic analysis of a multilayer plate subjected to a moving concentrated load with various acceleration and temperature** . *Sci. Tech. Dev. J. – Engineering and Technology* 2025; 8(1):1-1.

Phân tích ứng xử động của tấm nhiều lớp chịu tải trọng di chuyển với gia tốc thay đổi và ảnh hưởng nhiệt độ

Trần Nam Hải^{1,2}, Nguyễn Thị Thanh Quý^{1,2}, Lương Văn Hải^{1,2,*}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

¹Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường 14, quận 10, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (VNU-HCM), phường Linh Trung, Thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Liên hệ

Lương Văn Hải, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường 14, quận 10, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (VNU-HCM), phường Linh Trung, Thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Email: lvhai@hcmut.edu.vn

Lịch sử

- Ngày nhận: 01-01-2025
- Ngày sửa đổi: 10-3-2025
- Ngày chấp nhận: 30-3-2025
- Ngày đăng:

DOI:



Bản quyền

© ĐHQG Tp.HCM. Đây là bài báo công bố mở được phát hành theo các điều khoản của the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



TÓM TẮT

Bài báo này xây dựng lý thuyết và phương pháp số mới để phân tích ứng xử động của tấm nhiều lớp đặt trên nền Pasternak chịu tải trọng di chuyển với gia tốc thay đổi và xét ảnh hưởng của nhiệt độ. Phương pháp được nghiên cứu trong bài báo là phương pháp tấm nhiều lớp chuyển động MMPM (Multi-Layer Moving Plate Method). Ngoài ra, bài báo sử dụng lý thuyết tấm dầy Mindlin và nguyên lý công ảo để thiết lập phương trình chủ đạo mô tả chuyển động tấm và lực tác động. Tấm sau đó được rời rạc thành các phần tử 9 nút bằng phương pháp MMPM, và ghép nối các ma trận phần tử vào ma trận tổng thể để thu được phương trình chuyển động tổng quát của tấm nhiều lớp. Phương trình tổng quát này được giải bằng phương pháp Newmark để cho ra kết quả có hội tụ. Bài báo thực hiện được kiểm chứng với các kết quả thu được ở trường hợp tải tĩnh và tải động để so sánh với các công trình đã công bố nhằm chứng minh độ tin cậy của các kết quả trong nghiên cứu này. Tiếp theo, bài báo khảo sát các bài toán với những giá trị gia tốc khác nhau để xem xét sự ảnh hưởng của đại lượng này tới ứng xử tấm. Đồng thời, ảnh hưởng nhiệt độ được xem xét đến chuyển vị của tấm bằng cách đặt nhiệt độ tại mặt trên của tấm khác với nhiệt độ tại mặt dưới của tấm.

Từ khoá: Phương pháp tấm nhiều lớp chuyển động (MMPM), tải di động có gia tốc, nhiệt độ

GIỚI THIỆU

Đi cùng với sự phát triển kinh tế xã hội thì nhu cầu di chuyển và vận tải hàng hóa ngày càng gia tăng, vì lẽ đó mà cơ sở hạ tầng giao thông bao gồm hệ thống đường băng sân bay và đường cao tốc nhận được nhiều sự quan tâm của cộng đồng khoa học. Các kết cấu dạng này được mô hình như là một dầm hay tấm trên nền đàn nhớt chịu tác dụng của tải trọng di chuyển. Một số nghiên cứu liên quan đến phân tích kết cấu tấm trên nền đàn hồi bằng phương pháp giải tích phải kể đến như sau. Kim và Roeset¹ đã khảo sát ứng xử động của một tấm dài vô hạn trên nền đàn hồi chịu tải di động hằng số và tải điều hòa, phương pháp biến đổi Fourier FFT (Fast Fourier Transform) được sử dụng để tìm lời giải cho phương trình chủ đạo. Tiếp theo đó, Kim² đã phân tích ứng xử của tấm mỏng dài vô hạn trên nền Winkler và nền hai thông số chịu tác dụng đồng thời của tải trọng nền tĩnh và tải trọng chuyển động. Sun³ đã sử dụng phép biến đổi Fourier để tìm lời giải giải tích cho bài toán tấm Kirchhoff trên nền đàn nhớt chịu tải trọng di động điều hòa dạng sóng tròn. Xiang và cộng sự⁴ đã cung cấp lời giải chính xác cho bài toán dao động tấm dầy với bốn cạnh tựa đơn đặt trên nền Pasternak. Bằng cách áp dụng một lý thuyết mới, Xing và Liu⁵ đã đề xuất lời giải cho bài toán dao động tự do của tấm Mindlin chữ nhật. Với những điều kiện biên phức tạp, Fan và Cheung⁶ đã sử dụng phương pháp dải hữu hạn để phân tích dao động tự do của tấm mỏng chữ nhật. Cũng bằng phương pháp dải hữu hạn, Huang và Thambiratnam⁷ phân tích ứng xử của tấm chữ nhật trên nền đàn hồi chịu tải di chuyển có gia tốc. Những nghiên cứu kể trên đều sử dụng phương pháp giải tích để đưa ra lời giải cho phương trình vi phân chủ đạo mô tả chuyển động tấm. Một phương pháp mới ưu việt hơn, tận dụng sức mạnh điện toán của máy tính đối với những tình huống phức tạp như hệ có nhiều bậc tự do hoặc tải có gia tốc tên là phương pháp phần tử hữu hạn FEM (Finite Element Method) đã được áp dụng vào nghiên cứu động lực học kết cấu. Filho⁸, Hino và cộng sự⁹ và Olsson¹⁰ là những nhà tiên phong trong việc phát triển FEM vào nghiên cứu bài toán kết cấu dầm chịu tải trọng động. Tiếp theo, có thể kể đến các công trình của Thambiratnam and Zhuge¹¹, Yoshida và Weaver¹², Wu và cộng sự¹³ đều sử dụng phương pháp FEM để phân tích động lực học kết cấu tấm. Koh và cộng sự¹⁴ đã chỉ ra những khuyết điểm của FEM khi giải quyết bài toán tải di chuyển và đề xuất một phương pháp cải tiến, tên là phương pháp phần tử chuyển động MEM (Moving Element Method) để giải bài toán tàu-ray 1 chiều. Từ những nghiên cứu trên cho thấy phương pháp MEM đã mang lại những lợi thế nhất

Trích dẫn bài báo này: Nam Hải T, Thị Thanh Quý N, Văn Hải L. **Phân tích ứng xử động của tấm nhiều lớp chịu tải trọng di chuyển với gia tốc thay đổi và ảnh hưởng nhiệt độ.** *Sci. Tech. Dev. J. - Eng. Tech.* 2025; 8(1):1-12.

định cho phân tích động. Các nghiên cứu sau đó áp dụng phương pháp MEM có thể kể đến các công trình của: Koh và cộng sự¹⁵, Xu và cộng sự¹⁶, Cao và cộng sự¹⁷ về kết cấu tấm.

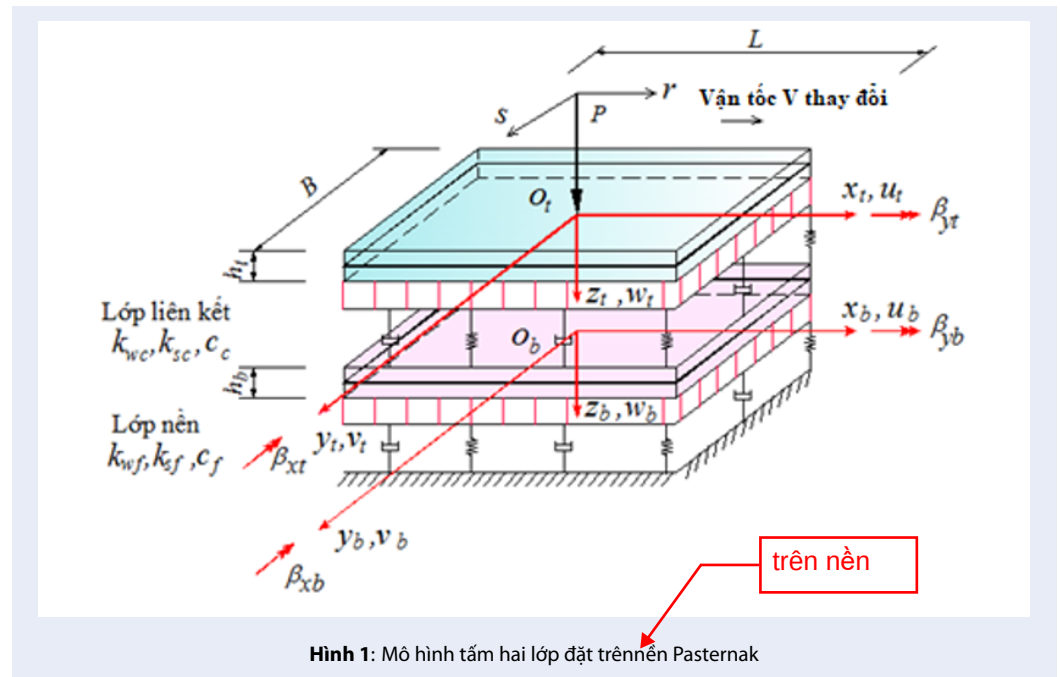
Hiện nay, tuy đã có một số nghiên cứu về kết cấu tấm sử dụng phương pháp phần tử chuyển động, nhưng chỉ dừng lại ở phân tích tĩnh đơn, một số nghiên cứu về tấm hai lớp thì không xét đến tác động của nhân tố nhiệt độ cũng như ảnh hưởng gia tốc tải trọng lên ứng xử của tấm. Vì vậy, bài báo này sẽ tập trung phát triển phương pháp MMPM để phân tích ứng xử động của tấm hai lớp trên nền Pasternak chịu tải trọng di chuyển có gia tốc và ảnh hưởng của nhiệt độ.

CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Tấm nhiều lớp đặt trên nền Pasternak

Mô hình vật lý

Xét mô hình tấm gồm hai lớp đồng nhất có kích thước được ký hiệu như sau: chiều dài L và chiều rộng B ; tấm trên có bề dày h_t và tấm dưới có bề dày h_b . Tấm nhiều lớp được liên kết với nhau bằng lớp Pasternak với các thông số độ cứng k_{wc} , hệ số kháng cắt k_{sc} và hệ số cản c_c . Tấm dưới được đặt trên nền Pasternak có độ cứng k_{wf} , hệ số kháng cắt k_{sf} và hệ số cản c_f . Gọi u_{0t} , v_{0t} , w_{0t} và u_{0b} , v_{0b} , w_{0b} lần lượt là các chuyển vị theo phương x , y , z của một điểm tại mặt trung hòa của tấm trên và tấm dưới; β_{xt} , β_{yt} và β_{xb} , β_{yb} là các góc xoay xung quanh trục y và x . Ký hiệu T_{tt} và T_{bb} lần lượt là nhiệt độ của tấm trên và tấm dưới. Tải tập trung P di chuyển dọc trục x của tấm với vận tốc thay đổi được thể hiện ở Hình 1.



Hình 1: Mô hình tấm hai lớp đặt trên nền Pasternak

Mối quan hệ biến dạng và ứng suất xét ảnh hưởng của nhiệt độ

Giả sử rằng trường nhiệt độ không đổi trong mặt phẳng O_{xy} của tấm và chỉ biến thiên theo phương bề dày z của tấm. Giải phương trình vi phân mô tả phân bố nhiệt độ theo bề dày của tấm của hàm phân bố nhiệt độ được biểu diễn như sau:

$$\frac{d}{dz} \left(\kappa \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (1)$$

trong đó K là hệ số truyền nhiệt của tấm và là hằng số trong trường hợp tấm đồng nhất.

Điều kiện biên được xem xét ở phương trình (1) như sau:

Tấm trên:

$$T = T_{tt}(z = h_t/2); T = T_{tb}(z = -h_t/2) \quad (2)$$

Tấm dưới:

$$T = T_{bt}(z = h_b/2); T = T_{bb}(z = -h_b/2) \quad (3)$$

Hàm nhiệt độ là các đa thức bậc nhất được thể hiện theo công thức sau:

$$T(z_t) = T_{tb} + (T_{tt} - T_{tb}) \left(\frac{z_t}{h_t} + \frac{1}{2} \right)$$

$$T(z_b) = T_{bb} + (T_{bt} - T_{bb}) \left(\frac{z_b}{h_b} + \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

Nhiệt độ tại vị trí nối tiếp giữa tấm trên và tấm dưới được cho bởi công thức:

thêm dấu ";"

dày

$$T_{tb} = T_{bt} = T_{tt} - \frac{(T_{tt} - T_{bb})}{\frac{h_t}{\kappa_t} + \frac{h_b}{\kappa_b}} \frac{h_t}{\kappa_t} = T_{bb} + \frac{(T_{tt} - T_{bb})}{\frac{h_t}{\kappa_t} + \frac{h_b}{\kappa_b}} \frac{h_b}{\kappa_b} \quad (5)$$

trong đó T_{tt} , T_{bb} lần lượt là nhiệt độ tại các mặt biên của tấm trên và tấm dưới; T_{tb} là nhiệt độ tại mặt dưới của tấm trên và T_{bt} là nhiệt độ tại mặt trên của tấm dưới; κ_t và κ_b lần lượt là hệ số truyền nhiệt của tấm trên và tấm dưới; h_t và h_b là bề dày tấm trên và tấm dưới.

Theo Yang và Shen¹⁸, mô-đun đàn hồi E và hệ số giãn nở nhiệt α của tấm trên và tấm dưới biến thiên theo nhiệt độ tuyệt đối như sau:

$$E_t(T) = E_0^t \left(E_{-1}^t T^{-1} + 1 + E_1^t T^1 + E_2^t T^2 + E_3^t T^3 \right)$$

$$E_b(T) = E_0^b \left(E_{-1}^b T^{-1} + 1 + E_1^b T^1 + E_2^b T^2 + E_3^b T^3 \right) \quad (6)$$

$$\alpha_t(T) = \alpha_0^t \left(\alpha_{-1}^t T^{-1} + 1 + \alpha_1^t T^1 + \alpha_2^t T^2 + \alpha_3^t T^3 \right)$$

$$\alpha_b(T) = \alpha_0^b \left(\alpha_{-1}^b T^{-1} + 1 + \alpha_1^b T^1 + \alpha_2^b T^2 + \alpha_3^b T^3 \right)$$

thêm dấu ";"

Trong đó: E_0^t , E_{-1}^t , E_1^t , E_2^t , E_3^t , α_0^t , α_{-1}^t , α_1^t , α_2^t , α_3^t là các hằng số vật liệu tấm trên; E_0^b , E_{-1}^b , E_1^b , E_2^b , E_3^b , α_0^b , α_{-1}^b , α_1^b , α_2^b , α_3^b là các hằng số vật liệu tấm dưới; T là nhiệt độ tuyệt đối (đo theo thang Kelvin-K).

Theo đó, mô-đun đàn hồi E và hệ số giãn nở nhiệt thay đổi theo chiều dày tấm như sau:

$$E(z_t) = (E_{tt}(T) - E_{tb}(T)) \left(\frac{z_t}{h_t} + \frac{1}{2} \right) + E_{tb}(T)$$

$$E(z_b) = (E_{bt}(T) - E_{bb}(T)) \left(\frac{z_b}{h_b} + \frac{1}{2} \right) + E_{bb}(T) \quad (7)$$

$$\alpha(z_t) = (\alpha_{tt}(T) - \alpha_{tb}(T)) \left(\frac{z_t}{h_t} + \frac{1}{2} \right) + \alpha_{tb}(T)$$

$$-\alpha(z_b) = (\alpha_{bt}(T) - \alpha_{bb}(T)) \left(\frac{z_b}{h_b} + \frac{1}{2} \right) + \alpha_{bb}(T)$$

canh giữa khung giấy

Trường biến dạng của tấm khi kể đến nhiệt độ có công thức sau đây

tách công thức thành 2 hàng

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \varepsilon_m + z \kappa \quad (8)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{0,x} \\ \beta_y + w_{0,y} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Với điều kiện trường biến dạng được phát biểu theo nguyên lý chống chất như sau:

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_T \quad (10)$$

trong đó ε_m là trường biến dạng cơ học; ε_t là trường biến dạng do nhiệt độ

$$\varepsilon_T = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \alpha(z, T) \Delta T \quad (11)$$

Trường ứng suất của tấm được thể hiện như sau:

$$\sigma = \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{matrix} \right] \left(\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \alpha(z, T) \Delta T \right) \quad (12)$$

$$\tau = \left\{ \begin{matrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \right\} \quad (13)$$

trong đó Q_{11} , Q_{12} , Q_{21} , Q_{22} , Q_{44} , Q_{55} , Q_{66} là các hằng số vật liệu của tấm.

Ngoại lực sinh ra bởi nhiệt độ được thể hiện như công thức sau:

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} N_x^T & M_x^T \\ N_y^T & M_y^T \\ N_{xy}^T & M_{xy}^T \end{matrix} \right] &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[\begin{matrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \alpha(z) \\ \alpha(z) \\ 0 \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} 1 & z \end{matrix} \right] \Delta T dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \frac{E(z)\alpha(z)\Delta T}{1-\nu} \left[\begin{matrix} 1 & z \end{matrix} \right] dz \quad (14) \end{aligned}$$

Phương trình chủ đạo

Phương trình chủ đạo của tấm nhiều lớp được thiết lập bằng nguyên lý công ảo cho tấm trên và tấm dưới.

Sau đây, công nội ảo của tấm trên và tấm dưới: được viết lần lượt như sau:

$$\partial W_t = \int_{\Omega_t} \left\{ \begin{matrix} (\partial \varepsilon_{mt})^T & (\partial \kappa_t)^T & (\partial \gamma_t)^T \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} D_{mt} & D_{mbt} & 0 \\ D_{mbt} & D_{bt} & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{mt} \\ \kappa_t \\ \gamma_t \end{matrix} \right\} d\Omega_t \quad (15)$$

$$\partial W_b = \int_{\Omega_b} \left\{ \begin{matrix} (\partial \varepsilon_{mb})^T & (\partial \kappa_b)^T & (\partial \gamma_b)^T \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} D_{mb} & D_{mbb} & 0 \\ D_{mbb} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{sb} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{mb} \\ \kappa_b \\ \gamma_b \end{matrix} \right\} d\Omega_b \quad (16)$$

với D_{mt} , D_{mb} là ma trận vật liệu cho biến dạng màng,

D_{mbt} , D_{mbb} là ma trận vật liệu cho biến dạng màng và biến dạng uốn,

D_{bt} , D_{bb} là ma trận vật liệu cho biến dạng uốn,

D_{st} , D_{sb} là những ma trận vật liệu cho biến dạng cắt,

$K_s = \frac{5}{6}$ là hệ số hiệu chỉnh cắt là $K_s = \frac{5}{6}$.

Công ngoại ảo của tấm trên nền Pasternak được viết như sau:

$$\partial W_E = \partial W_E^P + \partial W_E^m + \partial W_E^k + \partial W_E^{ks} + \partial W_E^c \quad (17)$$

với ∂W_E^P - công ngoại ảo do tải di chuyển được cho như sau:

$$\partial W_E^P = \int_{\Omega} (\partial u)^T b d\Omega \quad (18)$$

b - véc-tơ tải tác dụng lên tấm:

$$b = \left(0 \quad 0 \quad P \delta(x-S) \delta(y-0) \quad 0 \quad 0 \right)^T \quad (19)$$

trong đó P là độ lớn tải di động, S là quãng đường tải di chuyển và $\delta()$ là hàm the Dirac - Delta.

∂W_E^m là công ngoại ảo do lực quán tính:

$$\partial W_E^m = - \int_{\Omega} (\partial u)^T m u d\Omega \quad (20)$$

∂W_E^{kw} là công ngoại ảo do lực đàn hồi của nền Pasternak:

$$\partial W_E^{kw} = - \int_{\Omega} \partial w^T k_w w d\Omega \quad (21)$$

∂W_E^{ks} là công ngoại ảo do lực kháng cắt của nền Pasternak:

$$\partial W_E^{ks} = \int_{\Omega} \partial w^T k_s \nabla^2 w d\Omega \quad (22)$$

khoảng cách không đúng

khoảng cách không đúng

khoảng cách không đúng

∂W_E^c là công ngoại ảo do lực cản của nền Pasternak:

$$\partial W_E^c = - \int_{\Omega} \partial w^T c w d\Omega \quad (23)$$

Phương trình chuyển động của tấm nhiều lớp từ cân bằng công nội ảo và công ngoại ảo được thiết lập như sau:

- Tấm trên:

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \begin{matrix} (\delta \varepsilon_{mt})^T & (\delta \kappa_t)^T & (\delta \gamma_t)^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} D_{mt} & D_{mbt} & 0 \\ D_{bmt} & D_{bt} & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{mt} \\ \kappa_t \\ \gamma_t \end{bmatrix} d\Omega_t \\ + \int_{\Omega_t} \delta u_t^T m_t \ddot{u}_t d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \delta w_t^T k_{wc} (w_t - w_b) d\Omega_t \quad (24)$$

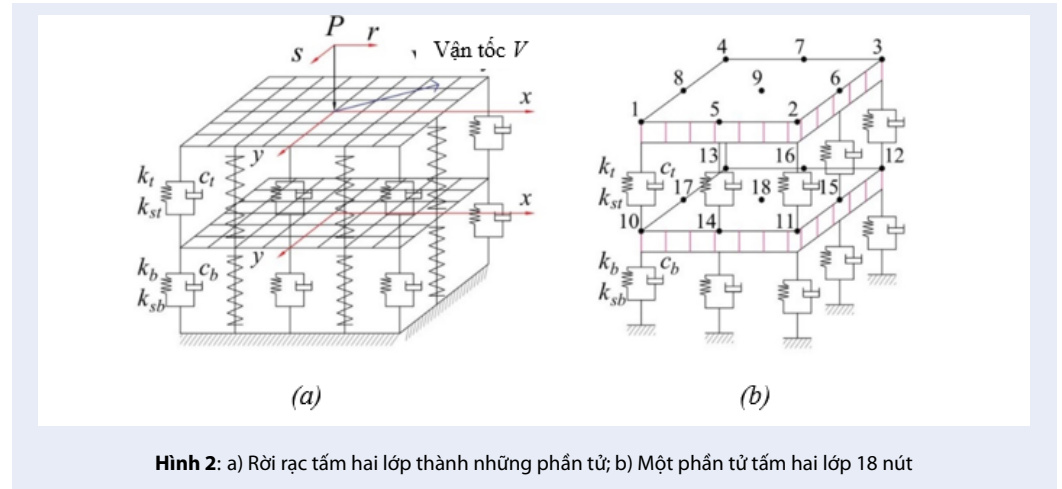
$$- \int_{\Omega_t} \delta w^T k_{sc} (\nabla^2 w_t - \nabla^2 w_b) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \delta w_t^T c_c (\dot{w}_t - \dot{w}_b) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \delta u_t^T b_t d\Omega_t$$

- Tấm dưới:

$$\int_{\Omega_b} \left\{ \begin{matrix} (\delta \varepsilon_{mb})^T & (\delta \kappa_b)^T & (\delta \gamma_b)^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} D_{mb} & D_{mbb} & 0 \\ D_{bmb} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{sb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{mb} \\ \kappa_b \\ \gamma_b \end{bmatrix} d\Omega_b \\ + \int_{\Omega_b} \delta u_b^T m_b \ddot{u}_b d\Omega_b - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{wc} (w_t - w_b) d\Omega_b + \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{sc} (\nabla^2 w_t - \nabla^2 w_b) d\Omega_b \quad (25) \\ - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T c_c (\dot{w}_t - \dot{w}_b) d\Omega_b + \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{wf} w_b d\Omega_b - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{sf} \nabla^2 w_b d\Omega_b - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T c_f \dot{w}_b d\Omega_b = 0$$

Phương pháp tấm nhiều lớp chuyển động

Tấm hai lớp được rời rạc thành các phần tử theo Phần tử tứ giác 9 nút (Quadrilateral Nine-Node Element - Q9), như trong Hình 2.



Hình 2: a) Rời rạc tấm hai lớp thành những phần tử; b) Một phần tử tấm hai lớp 18 nút

Khi tải trọng chuyển động với vận tốc ban đầu V_0 và gia tốc α thì mối quan hệ giữa hệ (r, s) và (x, y) được viết như sau:

$$\begin{cases} r = x - V_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ s = y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial t} = -(V_0 + \alpha t) = -v \quad (16)$$

trong đó $v = V_0 + \alpha t$ là vận tốc của tải trọng tại thời điểm t .

Từ đó, phương trình chuyển động của tấm trên (25) được viết lại trong hệ (r, s) như sau:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_t} \{ (\delta \varepsilon_{mt})^T (\delta K_t)^T (\delta \gamma_t)^T \} \begin{bmatrix} D_{mt} & D_{mbt} & 0 \\ D_{bmt} & D_{bt} & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mt} \\ K_t \\ \gamma_t \end{Bmatrix} drds \\
 & + \int_{\Omega_t} \delta u^T m_t \left(v^2 \frac{\partial^2 u_t(r,s)}{\partial r^2} - 2v \frac{\partial^2 u_t(r,s)}{\partial r \partial t} - \alpha \frac{\partial u_t(r,s)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_t(r,s)}{\partial t^2} \right) drds \\
 & + \int_{\Omega_t} \delta w_t^T k_t (w_t - w_b) drds - \int_{\Omega_t} \delta w^T k_{st} (\nabla^2 w_t - \nabla^2 w_b) drds \\
 & + \int_{\Omega_t} \delta w_t^T c_t \left(v \frac{\partial w_t(r,s)}{\partial t} - \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} + v \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} \right) drds = \int_{\Omega_t} \delta u^T b_t(r,s) drds
 \end{aligned} \quad (27)$$

Tương tự, phương trình chuyển động của tấm dưới (36) được viết trong hệ (r, s) như sau:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_b} \{ (\delta \varepsilon_{mb})^T (\delta K_b)^T (\delta \gamma_b)^T \} \begin{bmatrix} D_{mb} & D_{mbb} & 0 \\ D_{bmb} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{sb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mb} \\ K_b \\ \gamma_b \end{Bmatrix} drds \\
 & + \int_{\Omega_b} \delta u^T m_b \left(v^2 \frac{\partial^2 u_b(r,s)}{\partial r^2} - 2v \frac{\partial^2 u_b(r,s)}{\partial r \partial t} - \alpha \frac{\partial u_b(r,s)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_b(r,s)}{\partial t^2} \right) drds - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_t (w_t - w_b) drds \\
 & + \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{st} (\nabla^2 w_t - \nabla^2 w_b) drds - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T c_t \left(v \frac{\partial w_t(r,s)}{\partial t} - \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} + v \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} \right) drds \\
 & + \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_b w_b drds - \int_{\Omega_b} \delta w_b^T k_{sb} \nabla^2 w_b drds - \int_{\Omega_b} \delta w^T b_{cb} \left(\frac{\partial w_b(r,s)}{\partial t} - v \frac{\partial w_b(r,s)}{\partial r} \right) drds = 0
 \end{aligned} \quad (28)$$

Phương trình chuyển động tổng quát tấm hai lớp đạt được bằng cách ghép nối tất cả các ma trận phần tử:

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = P \quad (29)$$

với d , $\dot{d}$ và $\ddot{d}$ lần lượt kí hiệu véc-tơ gia tốc nút tổng thể, véc-tơ vận tốc nút tổng thể và véc-tơ chuyển vị nút tổng thể; M , C và K là ma trận khối lượng tổng thể, ma trận cản tổng thể và ma trận độ cứng tổng thể. Phương pháp Newmark được sử dụng trong bài báo để giải phương trình (30) cho các khảo sát ứng xử động của tấm nhiều lớp.

Ma trận phần tử tấm hai lớp đạt được bằng cách ghép nối ma trận phần tử tấm trên và tấm dưới như sau:

$$M^{(e)} = M_t^{(e)} + M_b^{(e)}; C^{(e)} = C_t^{(e)} + C_b^{(e)}; K^{(e)} = K_t^{(e)} + K_b^{(e)}; P^{(e)} = P_t^{(e)} + P_b^{(e)} \quad (30)$$

$M_t^{(e)}$ là ma trận khối lượng phần tử tấm trên:

$$M_t^{(e)} = m_t \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T N_t det J d\xi d\eta \quad (31)$$

$C_t^{(e)}$ là ma trận cản phần tử tấm trên:

$$\begin{aligned}
 C_t^{(e)} = & -2m_t V \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T N_{t,r} det J d\xi d\eta + c_c \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wt} det J d\xi d\eta \\
 & - c_c \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wb} det J d\xi d\eta
 \end{aligned} \quad (32)$$

$K_t^{(e)}$ là ma trận độ cứng phần tử tấm trên:

$$\begin{aligned}
 K_t^{(e)} = & \int_{\Omega_t^{(e)}} \left\{ (B_{mt})^T \quad (B_{bt})^T \quad (B_{st})^T \right\} \begin{bmatrix} D_{mt} & D_{mbt} & 0 \\ D_{bmt} & D_{bt} & 0 \\ 0 & 0 & D_{st} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{mt} \\ B_{bt} \\ B_{st} \end{Bmatrix} det J d\xi d\eta \\
 & - m_t a \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T N_{t,r} det J d\xi d\eta + m_t V^2 \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T N_{t,rr} det J d\xi d\eta + k_{wc} \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wt} det J d\xi d\eta - \\
 & k_{wc} \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wb} det J d\xi d\eta \\
 & - k_{sc} \int_{\Omega_t^{(e)}} (N_{wt}^T N_{wt,rr} + N_{wt}^T N_{wt,ss}) det J d\xi d\eta \\
 & + k_{sc} \int_{\Omega_t^{(e)}} (N_{wt}^T N_{wb,rr} + N_{wt}^T N_{wb,ss}) det J d\xi d\eta \\
 & - c_c V \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wt,r} det J d\xi d\eta + c_c V \int_{\Omega_t^{(e)}} N_{wt}^T N_{wb,r} det J d\xi d\eta
 \end{aligned} \quad (33)$$

$P_t^{(e)}$ là véc-tơ tải phần tử tấm trên:

$$P_t^{(e)} = \int_{\Omega_t^{(e)}} N_t^T b(r,s) det J d\xi d\eta - \int_{\Omega_t^{(e)}} \left([(B_{mt})^T] \begin{Bmatrix} N_{xt}^T \\ N_{yt}^T \\ N_{xyt}^T \end{Bmatrix} + [(B_{bt})^T] \begin{Bmatrix} M_{xt}^T \\ M_{yt}^T \\ M_{xyt}^T \end{Bmatrix} \right) det J d\xi d\eta \quad (34)$$

$M_b^{(e)}$ là ma trận khối lượng phần tử tấm dưới:

$$M_b^{(e)} = m_b \int_{\Omega_b^{(e)}} N_b^T N_b det J d\xi d\eta \quad (35)$$

$C_b^{(e)}$ là ma trận cản phần tử tấm dưới:

$$C_b^{(e)} = -2m_b V \int_{\Omega_b^{(e)}} N_b^T N_{b,r} det J d\xi d\eta + c_f \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb} det J d\xi d\eta$$

$$+ c_c \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb} \det J d\xi d\eta - c_c \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wt} \det J d\xi d\eta \quad (36)$$

$K_b^{(e)}$ là ma trận độ cứng phần tử tấm dưới:

$$K_b^{(e)} = \int_{\Omega_b^{(e)}} \left\{ \begin{matrix} (B_{mb})^T & (B_{bb})^T & (B_{sb})^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} D_{mb} & D_{mbb} & 0 \\ D_{bmb} & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{sb} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} B_{mb} \\ B_{bb} \\ B_{sb} \end{matrix} \right\} \det J d\xi d\eta$$

$$- m_b a \int_{\Omega_b^{(e)}} N_b^T N_{b,r} \det J d\xi d\eta + m_b V^2 \int_{\Omega_b^{(e)}} N_b^T N_{b,rr} \det J d\xi d\eta$$

$$+ k_{wf} \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb} \det J d\xi d\eta - c_f V \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb,r} \det J d\xi d\eta$$

$$- k_{sf} \int_{\Omega_b^{(e)}} (N_{wb}^T N_{wb,rr} + N_{wb}^T N_{wb,ss}) \det J d\xi d\eta$$

$$+ k_{wc} \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb} \det J d\xi d\eta - k_{wc} \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wt} \det J d\xi d\eta$$

$$- k_{sc} \int_{\Omega_b^{(e)}} (N_{wb}^T N_{wb,rr} + N_{wb}^T N_{wb,ss}) \det J d\xi d\eta + k_{sc} \int_{\Omega_b^{(e)}} (N_{wb}^T N_{wt,rr} + N_{wb}^T N_{wt,ss}) \det J d\xi d\eta$$

$$- c_c V \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wb,r} \det J d\xi d\eta + c_c V \int_{\Omega_b^{(e)}} N_{wb}^T N_{wt,r} \det J d\xi d\eta \quad (37)$$

$P_b^{(e)}$ là véc-tơ tải phần tử tấm dưới:

$$P_b^{(e)} = - \int_{\Omega_b^{(e)}} \left(\begin{bmatrix} (B_{mb})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xb}^T \\ N_{yb}^T \\ N_{xyb}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B_{bb})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xb}^T \\ M_{yb}^T \\ M_{xyb}^T \end{bmatrix} \right) \det J d\xi d\eta \quad (38)$$

KẾT QUẢ SỐ

Kiểm chứng

Bài toán tĩnh

Mô hình được kiểm chứng với bài toán tấm hai lớp chịu tải trọng tĩnh, đặt trên nền Pasternak hai thông số, kết quả thu được sẽ được kiểm chứng với số liệu trong công trình của Wu và cộng sự¹⁹. Nhiệt độ mặt trên và mặt dưới tấm bằng nhau $T_{tt} = T_{bb}$. Kích thước tấm hai lớp có kích thước như sau $L \times B = 3.75\text{m} \times 4.5\text{m}$ với chiều dày tấm trên $h_t = 0.22$ và chiều dày tấm dưới $h_b = 0.18\text{m}$. Thông số vật liệu tấm nhiều lớp lần lượt là $E_t = 3.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu_t = 0.15$, $\rho_t = 2400 \text{ kg/m}^3$ cho tấm trên, và $E_b = 1.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu_b = 0.25$, $\rho_b = 2300 \text{ kg/m}^3$ cho tấm dưới. Thông số lớp liên kết: $k_{wc} = 1.72 \times 10^8 \text{ N/m}^3$, $k_{sc} = 0$, $c_c = 1.75 \times 10^5 \text{ N.s/m}^3$ và thông số nền $k_{wf} = 1.52 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, $k_{sf} = 0$, $c_f = 3.79 \times 10^6 \text{ N.s/m}^3$. Tĩnh tải tập trung có độ lớn là $1 \times 10^5 \text{ N}$ và lưới chia là 20×20 . Bảng 1 so sánh chuyển vị lớn nhất tấm trên từ mô hình để xuất với số liệu của Wu và cộng sự²⁰ với sai số 0.98%. Kết luận, phương pháp MMPM đối với bài toán tĩnh cho ra kết quả đáng tin cậy.

Bảng 1: Chuyển vị lớn nhất của tấm trên

Nguồn	Chuyển vị lớn nhất (mm)
Wu và cộng sự ¹⁹	0.3562
Mô hình để xuất	0.3527
Sai khác (%)	0.98

Bài toán động

Tiếp theo, mô hình được kiểm chứng với tải trọng động di chuyển dọc theo giữa tấm phương x của tấm trên. Kết quả thu được từ mô hình được so sánh với số liệu trong nghiên cứu của Cao và cộng sự¹⁷ và Huang và Thambiratnam²⁰. Kích thước tấm hai lớp như sau $L \times B = 40\text{m} \times 10\text{m}$, chiều dày tấm trên và tấm dưới như nhau $h_t = h_b = 0.3\text{m}$. Thông số vật liệu tấm trên, và tấm dưới là $E_t = E_b = 3.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu_t = \nu_b = 0.25$, $\rho_t = \rho_b = 2440 \text{ kg/m}^3$. Thông số lớp liên kết: $k_{wc} = 1 \times 10^7 \text{ N/m}^3$, $k_{sc} = 0$, $c_c = 0$ và thông số nền $k_{wf} = \infty$, $k_{sf} = 0$, $c_f = 0$. Tải di động có độ lớn là $1 \times 10^3 \text{ N}$ với vận tốc không đổi $V = 20 \text{ m/s}$. Nhiệt độ hai mặt của tấm như nhau $T_{tt} = T_{bb}$. Nghiên cứu xem xét tính hội tụ của chuyển vị tại tâm tấm bằng cách sử dụng những lưới chia khác nhau và cùng một bước thời gian $\Delta t = 0.0025(\text{s})$. Bảng 2 ghi nhận kết quả chuyển vị của tấm tấm trên và tấm dưới, và so sánh với nghiên cứu của Cao và cộng sự¹⁷. Nhận thấy sự sai khác giữa mô hình để xuất và nghiên cứu¹⁷ là không đáng kể, phương pháp MMPM trong bài báo cho ra các kết quả ở bài toán động ở các lưới chia khác nhau là đáng tin cậy.

in nghiên ký hiệu toán học được đánh dấu

$E_t = E_b$

thiếu dấu ",",

Bảng 2: Hội tụ chuyển vị tâm tấm với những lưới chia khác nhau

Lưới chia	Tấm trên/dưới	Mô hình đề xuất (mm)	Cao và cộng sự [17] (mm)	Sai khác (%)
15 x 5	Trên	-4.3284×10^{-3}	-4.2741×10^{-3}	1.25
	Dưới	-4.3284×10^{-12}	-4.2741×10^{-12}	1.25
20 x 10	Trên	-4.4880×10^{-3}	-4.4356×10^{-3}	1.17
	Dưới	-4.4880×10^{-12}	-4.4356×10^{-12}	1.17
30 x 15	Trên	-4.7103×10^{-3}	-4.6559×10^{-3}	1.15
	Dưới	-4.7103×10^{-12}	-4.6559×10^{-12}	1.15

Kết quả nghiên cứu & thảo luận

Khảo sát ảnh hưởng của tấm nhiều lớp dưới tác động của nhiệt độ

Xét mô hình tấm hai lớp có kích thước $L \times B = 20\text{m} \times 10\text{m}$, chiều dày tấm trên tấm dưới như nhau $h_t = h_b = 0.1\text{m}$, hệ số Poisson $\nu = 0.2$ và bốn cạnh tựa đơn. Các thông số vật liệu được trình bày trong Bảng 3. Thông số lớp liên kết và nền $k_{wc} = k_{wf} = 1. \times 10^7 \text{N/m}^3$, $k_{sc} = k_{sf} = 1 \times 10^5 \text{N/m}^3$, $c_c = c_f = 1. \times 10^4 \text{N/m}^3$. Tấm chịu tải trọng tập trung $P = 1. \times 10^6 \text{N}$ di chuyển với vận tốc $V = 20\text{m/s}$, gia tốc $a = 20\text{m/s}^2$. Khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ tới độ võng tại tâm tấm với $T_u = T_{ph}$ và sau đó tăng dần nhiệt độ mặt trên $T_u = 400\text{K}, 500\text{K}, 600\text{K}$ trong khi nhiệt độ mặt dưới ở 300K .

thiếu dấu ",", "

Bảng 3: Thông số vật liệu tấm

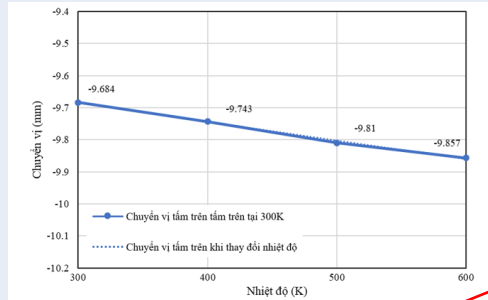
Vật liệu	Thông số	Eo	E-1	E1	E2	E3	E (300K)
Tấm trên	E (Pa)	3.49×10^{11}	0	-3.07×10^{-4}	2.16×10^{-7}	-8.95×10^{-11}	3.22×10^{11}
	α (1/K)	5.87×10^{-6}	0	9.10×10^{-4}	0	0	7.48×10^{-6}
	ρ (kg/m3)	-	-	-	-	-	2370
	k (W/mK)	-	-	-	-	-	9.19
Tấm dưới	E (Pa)	2.01×10^{11}	0	3.08×10^{-4}	-6.53×10^{-7}	0	2.08×10^{11}
	α (1/K)	1.23×10^{-5}	0	8.09×10^{-4}	0	0	1.53×10^{-5}
	ρ (kg/m3)	-	-	-	-	-	8166
	k (W/mK)	-	-	-	-	-	12.04

Dữ liệu Bảng 4 và biểu đồ theo Hình 3 và Hình 4 cho thấy chuyển vị lớn nhất tại tâm tấm trên và dưới tăng dần khi chênh lệch nhiệt độ giữa hai mặt tấm tăng, ngoài ra sự tăng chuyển vị này gần như tuyến tính. Tóm lại, nhiệt độ thực sự gây ra những tác động lên ứng xử kết cấu cùng với tải trọng cơ học, nhưng tùy vật liệu với các hệ số dẫn nhiệt khác nhau sẽ có tác động khác nhau lên kết cấu. Trong nghiên cứu này, chuyển vị của tấm bị ảnh hưởng chủ yếu do tải trọng cơ học, tác động nhiệt độ có tham gia nhưng không đáng kể.

tăng bề rộng cột của bảng
để vừa số liệu

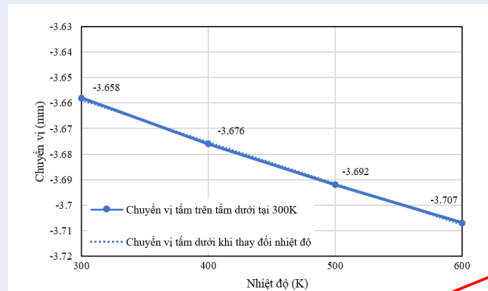
Bảng 4: Chuyển vị của tấm khi nhiệt độ tác dụng lên mặt trên thay đổi

Nhiệt độ mặt trên T_{tt} (K)	300	400	500	600
Chuyển vị tấm trên (mm)	-	-	-	-
	9.684	9.743	9.810	9.857
Chênh lệch so với 300K (%)		0.06	1,29	1.79
Chuyển vị tấm dưới (mm)	-	-	-	-
	3.658	3.676	3.692	3.707
Chênh lệch so với 300K (%)		0.47	0.91	1.34



tác dụng

Hình 3: Chuyển vị lớn nhất của tấm trên khi nhiệt độ tác dụng lên mặt trên thay đổi



tác dụng

Hình 4: Chuyển vị lớn nhất của tấm dưới khi nhiệt độ tác dụng lên mặt trên thay đổi

Khảo sát ảnh hưởng của tấm nhiều lớp dưới sự thay đổi gia tốc của tải động

Xét mô hình tấm hai lớp có kích thước $L \times B = 20\text{m} \times 10\text{m}$, chiều dày tấm trên và tấm dưới $h_t = h_b = 0.1\text{m}$, hệ số Poisson $\nu = 0.3$, bốn cạnh tựa đơn. Tấm chịu tải trọng tập trung $P = 1 \times 10^6\text{N}$ di chuyển với vận tốc ban đầu $V_0 = 20\text{m/s}$, nhiệt độ mặt trên tấm $T_{tt} = 400\text{K}$ và nhiệt độ mặt dưới tấm $T_{bb} = 300\text{K}$. Các thông số vật liệu được trình bày trong Bảng 3. Thông số lớp liên kết và nền $k_{wc} = k_{wf} = 1 \times 10^7\text{N/m}^3$, $k_{sc} = k_{sf} = 1 \times 10^5\text{N/m}^3$, $c_c = c_f = 1 \times 10^4\text{N/m}^3$. Khảo sát ảnh hưởng của gia tốc tải di chuyển đến ứng xử tấm trong các trường hợp sau $a_1 = a = 20\text{m/s}^2$, $a_2 = 2a$, $a_3 = 3a$, $a_4 = 5a$, $a_5 = 8a$.

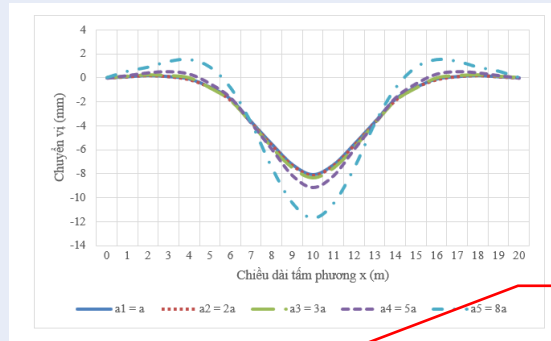
Kết quả từ Hình 5 và Hình 6 thu được tại thời điểm $t = 1.00\text{s}$, cho thấy khi gia tốc tải di chuyển tăng thì chuyển vị tấm trên và tấm dưới cũng tăng theo. Ảnh hưởng của gia tốc tới chuyển vị khi $\alpha \leq 60\text{m/s}^2$ là

Hình 5 và

không rõ ràng, khi $\alpha > 60\text{m/s}^2$ thì chuyển vị bắt đầu tăng nhanh. Điều này phù hợp với tính chất vật lý của kết cấu là khi lực chuyển động càng nhanh thì tác động của lực lên chuyển vị tấm càng lớn.

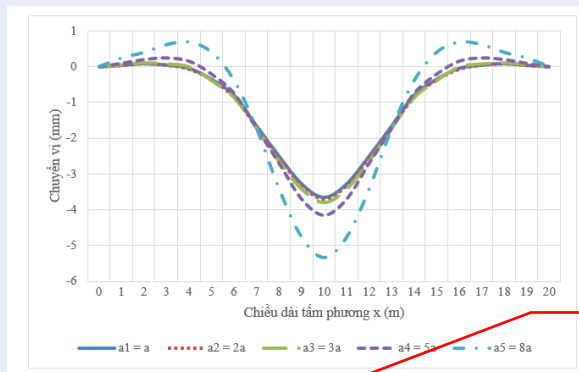
KẾT LUẬN

Bài báo sử dụng phương pháp số mới MMPM để mô phỏng và phân tích ứng xử động của tấm nhiều lớp trên nền Pasternak chịu tải di chuyển có gia tốc và sự thay đổi nhiệt độ tấm. Phương trình chủ đạo được thiết lập



với những

Hình 5: Chuyển vị tấm trên với những giá trị gia tốc khác nhau



với những

Hình 6: Chuyển vị tấm dưới với những giá trị gia tốc khác nhau

bằng nguyên lý công ảo, sau đó, tấm được rời rạc thành những phần tử 9 nút theo phương pháp MMPM giúp đạt được kết quả chính xác. Điểm nổi bật của nghiên cứu này là gia tốc thay đổi và ảnh hưởng nhiệt độ được xét đến đồng thời trong phân tích như thể hiện đúng các kết cấu tấm ngoài thực tế như đường cao tốc, đường sân bay,... Độ tin cậy của nghiên cứu được kiểm chứng qua các công trình đã xuất bản sử dụng phương pháp truyền thống FEM. Bài báo đã thu được những giá trị trong phân tích ứng xử động tấm nhiều lớp dưới tác động tải di chuyển có giá trị gia tốc khác nhau cùng với sự chênh lệch nhiệt độ giữa mặt trên và mặt dưới của tấm. Kết quả cho thấy gia tốc tải là một yếu tố có ảnh hưởng đáng kể đến chuyển vị tấm vì có tác động đến sự giảm độ cứng và độ cản của tấm và làm tăng chuyển vị tại tâm tấm. Đối với ảnh hưởng của nhiệt độ, tuy có sự gia tăng chuyển vị tại tâm tấm khi tăng nhiệt độ chênh lệch tại mặt tấm trên và tấm dưới, nhưng kết quả cho thấy sự ảnh hưởng này không đáng kể. Tóm lại, khảo sát của bài báo đem lại giá trị trong thiết kế kết cấu tấm nhiều lớp cũng như các kết cấu tương tự khi xem xét các yếu tố như gia tốc tải hay nhiệt độ ảnh hưởng đến sự phá hủy của kết cấu.

DANH MỤC TỪ VIẾT TẮT

MEM: Phương pháp phần tử chuyển động (Moving Element Method)

MMPM: Phương pháp phần tử hai lớp chuyển động (Multi-Layer Moving Plate Method)

FEM: Phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method)

Q9: Phần tử tứ giác 9 nút (Quadrilateral Nine-Node Element)

XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

Tác giả không có bất kỳ xung đột lợi ích nào trong công bố bài báo.

ĐÓNG GÓP CỦA TÁC GIẢ

Từ việc áp dụng phương pháp phần tử tấm nhiều lớp chuyển động để phân tích kết cấu tấm dưới tác dụng của tải trọng thay đổi gia tốc và nhiệt độ. Từ đó, bài báo cho thấy sự tác động của yếu tố gia tốc của tải trọng và nhiệt độ cùng gây ra ảnh hưởng đáng kể đến chuyển vị của tấm.

Trần Nam Hải: Thiết lập phương trình chuyển động giữa tấm và tải trọng và cùng viết bản thảo.

Nguyễn Thị Thanh Quý: Khảo sát, phân tích kết quả và cùng viết bản thảo.

Lương Văn Hải: Định hướng, xây dựng phương pháp MMPM cho các trường hợp khảo sát và cùng viết bản thảo.

CÁM ƠN

Nghiên cứu được tài trợ bởi Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) trong khuôn khổ Đề tài mã số B2024-20-12: “Mô hình và phân tích động lực học kết cấu tấm dầy ứng dụng trong các công trình xây dựng”.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Kim SM, Roesset JM. Moving loads on a plate on elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics*;124(9):1010–1017.
2. Kim SM. Buckling and vibration of a plate on elastic foundation subjected to in-plane compression and moving loads. *International Journal of Solids and Structures*;41(20):5647–5661.
3. Sun L. Dynamic response of Kirchhoff plate on a viscoelastic foundation to harmonic circular loads. *Journal of Applied Mechanics*;70:595–600.
4. Xiang Y, Wang CM, Kitipornchai S. Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak foundations. *Int J Mech Sci*;36(4):311–316.
5. Xing Y, Liu B. Closed form solutions for free vibrations of rectangular Mindlin plates. *Acta Mech Sin*;25:689–698.
6. Fan SC, Cheung YK. Flexural free vibrations of rectangular plates with complex support conditions. *Journal of Sound and Vibration*;93(1):81–94.
7. Huang MH, Thambiratnam DP. Deflection response of plate on Winkler foundation to moving accelerated loads. *Engineering Structures*;23:1134–1141.
8. Filho FV. Finite element analysis of structures under moving loads. *Shock and Vibration Digest*;10(8):27–35.
9. Hino J, Yoshimura T, Ananthanarayana N. Vibration analysis of non-linear beams subjected to moving load using the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*;100(4):477–491.
10. Olsson M. Finite element modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*;99(1):1–12.
11. Thambiratnam D, Zhuge Y. Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subject to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*;198(2):149–169.
12. Yoshida DM, Weaver W. Finite element analysis of beams and plates with moving load. *International Association for Bridge and Structural Engineering*;31(1):179–195.
13. Wu JS, Lee ML, Lai TS. The dynamic analysis of a flat plate under a moving load by the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*;24(4):743–762.
14. Koh CG, Ong JSY, Chua DKH. Moving element method for train-track dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*;56(11):1549–1567.
15. Koh CG, Sze PP, Deng TT. Numerical and analytical methods for in-plane dynamic response of annular disk. *International Journal of Solids and Structures*;43(1):112–131.
16. Xu WT, JH L, Zhang YH. 2D moving element method for random vibration analysis of vehicles on Kirchhoff plate with Kelvin foundation. *Latin American Journal of Solids and Structures*;6(2):169–183.
17. Cao TNT, Reddy JN, Lieu QX. A multi-layer moving plate method for dynamic analysis of viscoelastically connected double-plate systems subjected to moving loads. *Advances in Structural Engineering*;24(9):1798–1813.
18. Yang J, Shen HS. Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments. *Journal of Sound and Vibration*;255(3):579–602.
19. Wu J, Liang J, Adhikari S. Dynamic response of concrete pavement structure with asphalt isolating layer under moving load. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*;1(6):439–447.
20. Huang MH, Thambiratnam DP. Dynamic response of plates on elastic foundation to moving loads. *Journal of Engineering Mechanics*;128(9):1016–1022.

Dynamic analysis of a multilayer plate subjected to a moving concentrated load with various acceleration and temperature

Nam Hai Tran^{1,2}, Thi Thanh Quy Nguyen^{1,2}, Van Hai Luong^{1,2,*}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

¹Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Technology (HCMUT), 268 Ly Thuong Kiet Street, District 10, Ho Chi Minh City, Vietnam

²Vietnam National University Ho Chi Minh City, Linh Trung Ward, Thu Duc District, Ho Chi Minh City, Vietnam

Correspondence

Van Hai Luong, Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Technology (HCMUT), 268 Ly Thuong Kiet Street, District 10, Ho Chi Minh City, Vietnam

Vietnam National University Ho Chi Minh City, Linh Trung Ward, Thu Duc District, Ho Chi Minh City, Vietnam

Email: lvhai@hcmut.edu.vn

History

- Received: 01-01-2025
- Revised: 10-3-2025
- Accepted: 31-3-2025
- Published Online: 31-3-2025

DOI :



Copyright

© VNUHCM Press. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



ABSTRACT

The paper develops a new theory about numerical method to analyze dynamic behaviors of the multilayer plate which rested on a Pasternak foundation under the moving concentrated load with variable acceleration and temperature. The numerical method is developed by using the Multilayer Moving Plate Method (MMPM) in this paper. In addition, the Mindlin plate theory and the virtual work principle were applied to establish the governing equation of motion that can describe displacements of the multilayer plate as well as effects of the moving force to the structure. The multilayer plate is discretized into 9 Node-Lagrange by the MMPM which combined with element matrices into a global matrix to obtain the governing equation of motion for the plate structure. This governing equation of motion is solved by the Newmark method to produce convergent results. Then, the paper practices verification with results obtained the published papers regarding behaviour of plate under static and dynamic cases to demonstrate the reliability of results in this paper. Next, the paper examines behaviour of the multilayer plate under various acceleration to analyze the plate displacement. Subsequently, the influence of temperature on the plate to the displacement is considered by setting different temperature at the top plate and the bottom plates.

Key words: MMPM, moving load with acceleration, temperature.

Cite this article : Hai Tran N, Quy Nguyen T T, Hai Luong V. **Dynamic analysis of a multilayer plate subjected to a moving concentrated load with various acceleration and temperature** . *Sci. Tech. Dev. J. – Engineering and Technology* 2025; 8(1):1-1.