

Phương pháp mới kết hợp phân tích đẳng hình học và phương pháp phần tử chuyển động trong phân tích dầm siêu dài chịu tải trọng di động

Đỗ Ngọc Thuận^{1,2}, Lương Văn Hải^{1,2,*}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

¹Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường Diên Hồng, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (VNU-HCM), phường Linh Xuân, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Liên hệ

Lương Văn Hải, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT), 268 đường Lý Thường Kiệt, phường Diên Hồng, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (VNU-HCM), phường Linh Xuân, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Email: lvhai@hcmut.edu.vn

Lịch sử

- Ngày nhận: 05-02-2026
- Ngày sửa đổi: 10-03-2026
- Ngày chấp nhận: 27-05-2026
- Ngày đăng: 20-08-2026

DOI : <https://doi.org/10.32508/vnuhcmj-et.v9i3.1575>



Check for updates

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày một phương pháp phân tích mới kết hợp giữa phân tích đẳng hình học (Isogeometric Analysis – IGA) và phương pháp phần tử chuyển động (Moving Element Method – MEM), gọi là phân tích đẳng hình học chuyển động (Moving Isogeometric Analysis – MIGA), nhằm phân tích ứng xử động của dầm composite siêu dài chịu tải trọng di động trên nền đàn nhớt. Trong khuôn khổ đề xuất, hệ tọa độ chuyển động của MEM được tích hợp với hàm nội suy NURBS của IGA, cho phép mô phỏng chính xác hình học kết cấu đồng thời nâng cao đáng kể hiệu quả tính toán đối với các bài toán kết cấu nhịp lớn. Để mô tả chính xác ứng xử cơ học của vật liệu composite và ảnh hưởng của biến dạng cắt, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (Higher-Order Shear Deformation Theory – HSDT) được sử dụng. Việc áp dụng hàm NURBS không chỉ loại bỏ sai số hình học mà còn tự nhiên thỏa mãn yêu cầu liên tục bậc cao của HSDT, từ đó cải thiện độ chính xác và tính ổn định của mô hình số.

Độ tin cậy của phương pháp MIGA được kiểm chứng thông qua các ví dụ số và so sánh với các nghiệm giải tích cũng như các kết quả đã công bố trong tài liệu trước đây. Kết quả cho thấy phương pháp đề xuất đạt độ chính xác rất tốt so với nghiệm đàn hồi ba chiều trong phân tích tĩnh. Trong phân tích động, MIGA cho kết quả gần với lời giải tham chiếu, đồng thời yêu cầu thời gian tính toán thấp hơn so với MEM truyền thống và cho độ chính xác cao hơn khi so sánh với phương pháp FEM. Cuối cùng, ảnh hưởng của các tham số nền đàn nhớt và vận tốc tải trọng đến phản ứng động của dầm composite được khảo sát và thảo luận chi tiết.

Từ khóa: Phân tích đẳng hình học chuyển động, dầm composite, tải trọng di động, NURBS, nền đàn nhớt

GIỚI THIỆU

Sự phát triển nhanh chóng của khoa học và công nghệ đã dẫn đến những yêu cầu ngày càng khắt khe về khả năng dự báo chính xác ứng xử của kết cấu dưới các điều kiện tải trọng phức tạp, đặc biệt là với kết cấu lớn trong xây dựng dân dụng. Các phương pháp giải tích đại diện cho những cách tiếp cận sớm nhất và chặt chẽ nhất trong phân tích kết cấu. Chúng được công nhận rộng rãi vì độ chính xác cao, cũng như khả năng giải thích vật lý rõ ràng¹⁻⁴. Tuy nhiên, những phương pháp này bị hạn chế đáng kể khi phân tích các bài toán có hình học phức tạp, hoặc các mô hình vật liệu tiên tiến có ứng xử dị hướng.

Để khắc phục những hạn chế này, phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) đã được đề xuất nhằm giải các bài toán phức tạp⁵⁻⁷. Tuy nhiên, FEM gặp phải những hạn chế như có sai số hình học, tính liên tục thấp, chủ yếu C^0 . Ngoài ra, khi phân tích các kết cấu siêu dài chịu tải trọng di động, vị trí tải phải được cập nhật ở mỗi bước thời gian, dẫn đến chi phí tính toán tăng lên

đáng kể.

Nhằm giải quyết bài toán kết cấu siêu lớn chịu tải trọng di chuyển, Koh và cộng sự⁸ đã đề xuất phương pháp phần tử chuyển động (MEM), trong đó sử dụng một hệ tọa độ chuyển động cùng với tải trọng. Cách tiếp cận này làm giảm đáng kể số lượng phần tử và tăng cường ổn định số. Tuy nhiên, MEM vẫn gặp khó khăn khi phân tích các vật liệu dị hướng, và khó nắm bắt chính xác các cơ chế biến dạng phức tạp của vật liệu này.

Nhằm khắc phục những hạn chế về xấp xỉ hình học và tính liên tục giữa các phần tử, Hughes và cộng sự⁹ đã đề xuất phân tích đẳng hình học (IGA). Bằng cách sử dụng các hàm cơ sở NURBS (B-Spline) cho cả biểu diễn hình học và nghiệm xấp xỉ, IGA mô hình chính xác mọi dạng hình học của kết cấu và bảo đảm tính liên tục bậc cao. Gần đây, một nghiên cứu dựa trên IGA kết hợp với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cải tiến đã được đề xuất để phân tích ổn định, dao động riêng và đáp ứng động của dầm composite hai lớp đặt trên nền Pasternak, có xét điều kiện biên đàn

Trích dẫn bài báo này: Thuận D N, Hải L V. Phương pháp mới kết hợp phân tích đẳng hình học và phương pháp phần tử chuyển động trong phân tích dầm siêu dài chịu tải trọng di động. VNUHCM J. Eng. Technol. 2026; 9(2):3178-3187.

Bản quyền

© Tạp chí ĐHQG Tp.HCM. Đây là bài báo công bố mở được phát hành theo các điều khoản của the Creative Commons Attribution 4.0 International license.

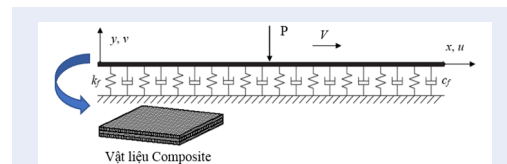
hồi và trượt tương đối giữa các lớp¹⁰. Tuy nhiên, IGA vẫn dựa trên việc rời rạc hóa không gian tổng thể, dẫn đến số lượng bậc tự do của hệ lớn, từ đó hạn chế tính hiệu quả khi áp dụng cho các bài toán kết cấu siêu lớn chịu tải di động. Các nghiên cứu về dầm chịu tải trong di sử dụng MEM có thể tìm thấy trong

Từ những thảo luận trên cho thấy, MEM và IGA có thể bổ sung điểm mạnh cho nhau. Do vậy, nghiên cứu này đề xuất một phương pháp tính toán thống nhất, gọi là phương pháp đẳng hình học chuyển động (MIGA), kết hợp khái niệm hệ tọa độ di động của MEM với tính chính xác hình học và tính liên tục bậc cao của IGA. Cách tiếp cận này cho phép phân tích chính xác và hiệu quả các kết cấu dầm siêu dài chịu tải trọng di động sử dụng vật liệu dị hướng.

CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Dạng yếu của dầm trên nền đàn nhớt chịu tải trọng di chuyển

Mô hình tính được thể hiện trên Hình 1, gồm kết cấu dầm có chiều dài L , tựa trên nền đàn nhớt và chịu tải trọng di chuyển tập trung P . Mặt cắt dầm có bề rộng b , chiều cao h . Nền có độ cứng k_f và độ cản c_f . Tải trọng P di chuyển dọc theo dầm với vận tốc V . Trong nghiên cứu này, dầm được giả định là siêu dài, nghĩa là chiều dài của nó đủ lớn sao cho các hiệu ứng biên là không đáng kể trong vùng quan tâm.



Hình 1: Dầm composite trên nền đàn nhớt, chịu tải trọng tập trung di chuyển [Nguồn: Nhóm tác giả]

Trường chuyển vị bậc cao của một điểm tùy ý được định nghĩa như sau¹¹:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, t) - y \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + f(y) \Phi_x(x, t) \\ v(x, y, t) &= v_0(x, t) \end{aligned} \quad (01)$$

hay

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} + y \begin{Bmatrix} -v_{,x} \\ 0 \end{Bmatrix} + f(y) \begin{Bmatrix} \Phi_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (02)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 1 & y & f(y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (03)$$

trong đó $u_0(x, t)$ và $v_0(x, t)$ lần lượt là các thành phần chuyển vị ngang và độ võng của trục dầm. $\Phi_x(x, t)$ là góc quay quanh trục z . Hàm $f(y)$ mô tả sự phân bố của biến dạng cắt và ứng suất cắt trên chiều dày. Trong nghiên cứu này, hàm biến dạng cắt bậc năm¹² được áp dụng:

$$f(y) = \frac{7}{8}y - \frac{2}{h^2}y^3 + \frac{2}{h^4}y^5 \quad (04)$$

Trường biến dạng được thể hiện như sau:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{0,x} - yv_{0,xx} + f(y)\Phi_{x,x} \\ &= \epsilon_0 + y\epsilon_1 + f(y)\epsilon_2 \end{aligned} \quad (05)$$

hoặc

$$\mathbf{u} = \{\epsilon_0 \ \epsilon_1 \ \epsilon_2\} \begin{Bmatrix} 1 \\ y \\ f(y) \end{Bmatrix} \quad (06)$$

và

$$\gamma_{xy} = f'(y)\Phi_x = f'(y)\epsilon_3 \quad (07)$$

Phương trình chủ đạo của dầm được được viết như phương trình (8):

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta \epsilon^T J_p \epsilon dx + \int_0^L \delta \epsilon_s J_s \epsilon_s dx + \int_0^L \delta u_d^T \mathbf{R}_d dx \\ + \int_0^L \delta v k_f v dx + \int_0^L \delta v c_f v dx = \int_0^L \delta u_d^T \Psi dx \end{aligned} \quad (08)$$

$$\epsilon = (\epsilon_0 \ \epsilon_1 \ \epsilon_2)^T \quad (09)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_5 \\ \mathbf{R}_4 & \mathbf{R}_5 & \mathbf{R}_6 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_5, \mathbf{R}_6) \\ = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, y, y^2, f(y), yf(y), f^2(y)) \mathbf{I}_{(2 \times 2)} dy \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_d = (\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)^T \quad (12)$$

ở đây $\mathbf{I}_{(2 \times 2)}$ là ma trận đơn vị kích thước 2×2 , Ψ là véc-tơ tải trọng, $\delta(\cdot)$ là hàm Dirac delta, là vận tốc của chuyển vị theo phương trục y .

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} 0 & P\delta(x-S) & 0 \end{pmatrix}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_4 \\ J_2 & J_3 & J_5 \\ J_4 & J_5 & J_6 \end{bmatrix} \quad (14)$$

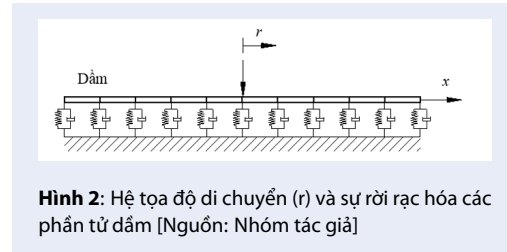
$$\begin{aligned} (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6) \\ = \int_{-h/2}^{h/2} (1, y, y^2, f(y), yf(y), f^2(y)) \bar{D}_{11} dy \end{aligned} \quad (15)$$

$$J_s = \int_{-h/2}^{h/2} f'(y)^2 \bar{D}_{55} dy \quad (16)$$

trong đó $\bar{D}_{11}$ và $\bar{D}_{55}$ là hệ số độ cứng đàn hồi của vật liệu composite.

Phân tích đẳng hình học chuyển động (MIGA)

Trước tiên, miền bài toán được rời rạc thành một tập hợp các phần tử dầm 1D, như minh họa trong Hình 2.



Một hệ tọa độ (r) được gắn vào tải và chuyển động cùng vận tốc với tải. Tại thời điểm t , tải trọng đi được quãng đường S . Mỗi quan hệ giữa (x) và (r) như sau:

$$r = x - S \quad (17)$$

Sử dụng phép biến đổi Galileo cho mỗi quan hệ vị phân giữa (x) và (r). Khi đó, phương trình vi phân chuyển động (8) được viết trong hệ tọa độ (r) như sau:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \delta \mathbf{u}_d^T \mathbf{R} \left(V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_d(r)}{\partial r^2} - 2V \frac{\partial^2 \mathbf{u}_d(r)}{\partial r \partial t} - a \frac{\partial \mathbf{u}_d(r)}{\partial r} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_d(r)}{\partial t^2} \right) dr + \int_0^L \delta \varepsilon^T J_p \varepsilon dr + \int_0^L \delta \varepsilon_s J_s \varepsilon_s dr \\ & + \int_0^L \delta v k_f v dr + \int_0^L \delta v c_f \left(\frac{\partial v(r,t)}{\partial t} - V \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \right) dr \\ & = \int_0^L \delta u_d^T \Psi dr \end{aligned} \quad (18)$$

Việc sử dụng HSDT kết hợp với hệ tọa độ di động dẫn đến yêu cầu liên tục bậc cao (C^2) trong phương trình chuyển động, trong khi FEM/MEM thường chỉ bảo đảm liên tục C^0 . Tuy nhiên, NURBS với tính liên tục bậc cao vốn có lại đặc biệt phù hợp cho việc kết hợp với lý thuyết dầm bậc cao (HOBT). Chuyển vị tại điểm điều khiển I được biểu diễn thông qua hàm NURBS như sau:

$$\mathbf{u}^h(\xi) \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_x \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^m \begin{Bmatrix} \Gamma_I(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_I(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_I(\xi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ \Phi_{xI} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^m \Gamma_I(\xi) d_I \quad (19)$$

trong đó $\Gamma_I(\xi)$ là hàm cơ sở NURBS 1D [9]; d_I là bậc tự do của điểm điều khiển I ; m là số điểm điều khiển.

$$\Gamma_I(\xi) = \frac{K_{I,p}(\xi) w_I}{\sum_{i=1}^{n_\xi} K_{i,p}(\xi) w_i} \quad (20)$$

$$\mathbf{d}_I = \begin{Bmatrix} u_I & v_I & \Phi_{xI} \end{Bmatrix}^T \quad (21)$$

Hàm cơ sở bậc 0 và hàm cơ sở bậc p được định nghĩa như (22):

$$\begin{aligned} K_{i,0}(\xi) &= \begin{cases} 1, & \text{khi } \xi_i \leq \xi < \xi_{(i+1)} \\ 0, & \text{khi } \xi \geq \xi_{(i+1)}, \xi < \xi_i \end{cases} \\ K_{i,0}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} K_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+p}} K_{i+1,p-1}(\xi) \end{aligned} \quad (22)$$

Trường chuyển vị được viết lại dưới dạng ma trận thu gọn như sau:

$$\mathbf{u}_d^T = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \sum_{I=1}^n \{A_0, A_1, A_2\} d_I = \sum_{I=1}^n d_I \quad (23)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} \Gamma_I & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_I & 0 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\Gamma_{I,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_v = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_I & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Các thành phần biến dạng được biểu thị dưới dạng:

$$\begin{aligned} \varepsilon^T &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{I=1}^n \begin{Bmatrix} \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \end{Bmatrix} d_I \\ &= \sum_{I=1}^n \Omega d_I \end{aligned} \quad (25)$$

$$\varepsilon_s = \Omega_s d_I \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \begin{Bmatrix} \Gamma_{I,r} & 0 & 0 \end{Bmatrix}; \Omega_1 = \begin{Bmatrix} 0 & -\Gamma_{I,rr} & 0 \end{Bmatrix}; \\ \Omega_2 &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_{I,r} \end{Bmatrix}; \Omega_s = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_I \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (27)$$

Phương trình chuyển động của phần tử dầm trong hệ tọa độ chuyển động:

$$\mathbf{M}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} = \mathbf{P}^{(e)} \quad (28)$$

trong đó $\mathbf{M}^{(e)}$, $\mathbf{C}^{(e)}$, $\mathbf{K}^{(e)}$ và $\mathbf{P}^{(e)}$ tương ứng là ma trận khối lượng, ma trận cản, ma trận độ cứng và vectơ tải

trọng phần tử.

$$\begin{aligned} M^{(e)} &= \int_0^L \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} dr \\ C^{(e)} &= -2V \int_0^L \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} dr \\ &\quad + c_f \int_0^L A_v^T A_v dr \\ K^{(e)} &= \int_0^L \left\{ (\Omega_0)^T \quad (\Omega_1)^T \quad (\Omega_2)^T \right\} \\ &\quad J_p \left\{ \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} \right\} dr + \int_0^L (\Omega_s)^T J_s \Omega_s dr \\ &\quad + V^2 \int_0^L \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} dr \\ &\quad - a \int_0^L \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} dr \\ &\quad + k_f \int_0^L A_v^T A_v dr - c_f V \int_0^L A_v^T A_{v,r} dr \\ P^{(e)} &= \int_0^L \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^T \Psi(r) dr \end{aligned} \quad (29)$$

trong đó $(\cdot)_{,r}$ và $(\cdot)_{,rr}$ lần lượt là đạo hàm bậc một và bậc hai đối với r . Bằng cách tập hợp sự đóng góp của tất cả các phần tử, ta thu được hệ phương trình tổng thể:

$$Md + Cd + Kd = P \quad (30)$$

Phương trình được giải bằng phương pháp số Newmark với gia tốc trung bình, trong đó $\gamma = \frac{1}{2}$ và $\beta = \frac{1}{4}$

KẾT QUẢ SỐ

Kiểm chứng độ tin cậy của MIGA

Để xác minh tính chính xác của MIGA được đề xuất, các kết quả bằng số được so sánh với nghiệm giải tích và các kết quả số đã được công bố trước đó. Độ chính xác của phương pháp được đánh giá dựa trên sự phù hợp của các đáp ứng chuyển vị và sai số tương đối giữa kết quả hiện tại và nghiệm đối chiếu.

Các số liệu dùng để phân tích ứng xử của dầm được chọn từ các nghiên cứu đã công bố để đảm bảo độ tin cậy cho quá trình kiểm chứng MIGA. Các thông số cụ thể như sau:

Phân tích tĩnh: Số liệu bao gồm¹³: $E_1 = 25E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, $p = 1$.

Dao động tự do: Số liệu gồm có¹: $E_1 = 40E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, $p = 1$, $G_{23} = 0.5E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$

Phân tích tải di chuyển: Số liệu được lấy từ nghiên cứu của Koh và cộng sự⁸, như trong Bảng 1.

Bảng 1: Các tham số dầm, tải trọng và nền cho phân tích tải trọng chuyển động⁸

E	2×10^{11} Pa	k_f	1×10^7 N/m ²
I	3.06×10^{-5} m ⁴	c_f	4900 Ns/m ²
m	60 kg/m	F_c	4900 Ns/m ²
L	50m	V	20 m/s (72 km/h)

Kết quả phân tích hội tụ

Kết quả hội tụ được trình bày như trong Hình 3 và Hình 4. Đối với các bài toán tĩnh và dao động tự do, bậc NURBS được chọn là $p = 4$, lưới phần tử là $n = 15$. Bài toán tải trọng di chuyển, chọn $p=4$ và $n=100$ phần tử, bước thời gian khảo sát $\Delta t = 0.005(s)$.

Kết quả phân tích tĩnh

Bảng 2 thể hiện kết quả độ võng không thứ nguyên $\bar{v} = 100E_2 h^2 A_v/qL^4$ của dầm composite, chịu tải trọng phân bố đều, trong đó v biểu thị độ võng ở giữa nhịp, A là diện tích mặt cắt ngang, q là tải phân bố đều.

Bảng 2: Độ võng không thứ nguyên của dầm composite (0°/90°/0°) dưới tải phân bố đều [Nguồn: Nhóm tác giả]

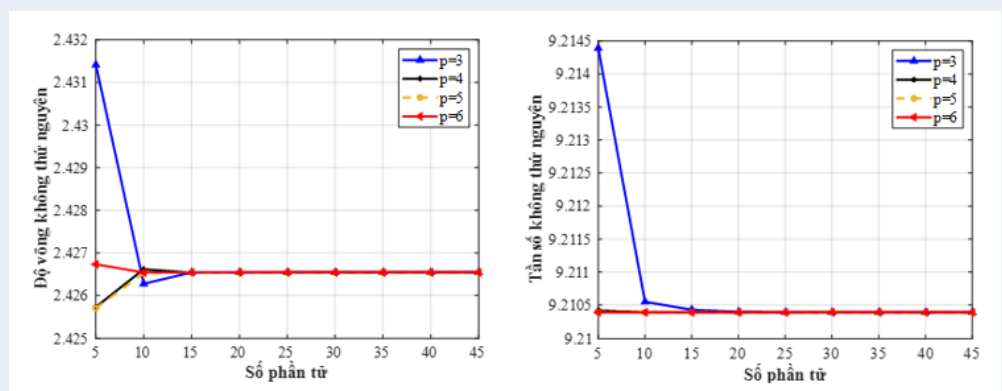
L / h	Phương pháp	Điều kiện biên		
		Khớp	Ngàm	Công-xôn
5	Chính xác 3D13	2.4120	1.5370	6.8240
	MIGA	2.4265	1.5398	6.8464
10	Chính xác 3D13	1.0960	0.5320	3.4550
	MIGA	1.1033	0.5341	3.4676
50	Chính xác 3D13	0.6650	0.1470	2.2510
	MIGA	0.6649	0.1472	2.2522

Ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_x = \frac{bh^2}{qL^2} \sigma_x (L/2, h/2)$ và $\bar{\tau}_{xy} = \frac{bh}{qL} \tau_{xy} (0, 0)$ được thể hiện trong Bảng 3.

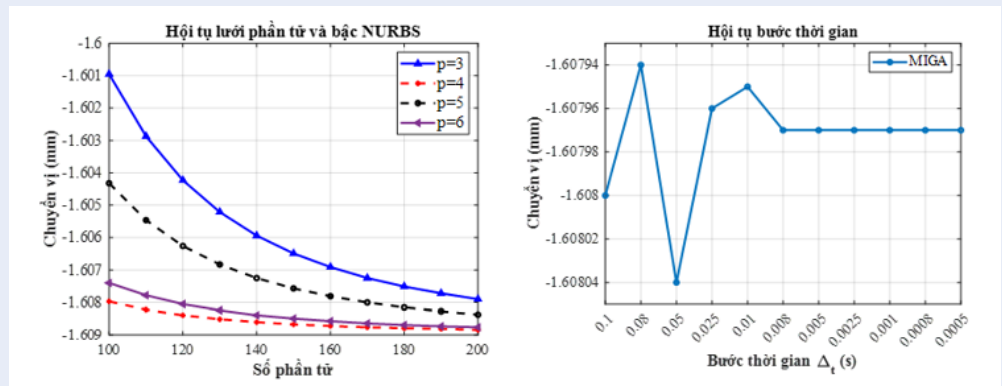
Sự phân bố của ứng suất cắt và ứng suất pháp chuẩn hóa theo chiều dày của dầm composite, với $L/h = 5$ được trình trong Hình 5.

Kết quả trên Bảng 2 và 3 và Hình 5 cho thấy có sự tương đồng về độ võng và ứng suất giữa phương pháp MIGA so với các kết quả tham chiếu. Điều này chứng minh độ tin cậy của MIGA trong phân tích ứng xử của kết cấu dầm chịu tải trọng tĩnh.

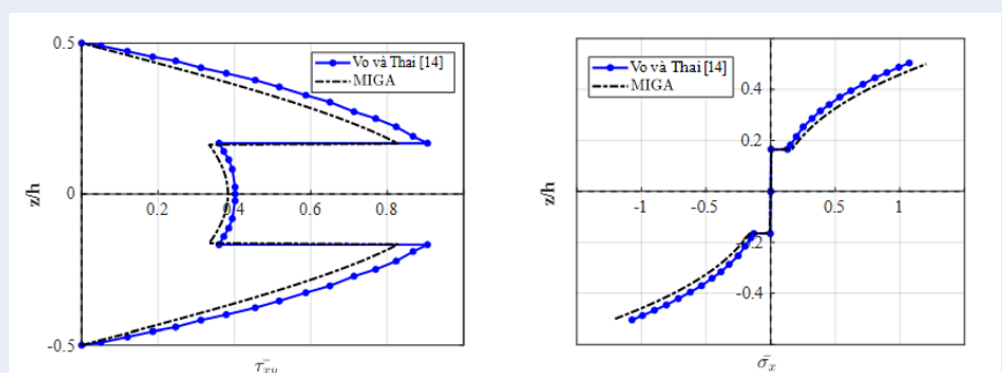
Kết quả phân tích dao động tự do



Hình 3: Sự hội tụ của dầm chịu tải tĩnh (trái) và dao động tự do (phải) [Nguồn: Nhóm tác giả]



Hình 4: Sự hội tụ của lưới và bậc NURBS (trái), và bước thời gian phân tích (phải) [Nguồn: Nhóm tác giả]



Hình 5: Ứng suất chuẩn hóa phân bố theo chiều dày của dầm composite tựa đơn với $L/h = 5$ [Nguồn: Nhóm tác giả]

Bảng 3: Ứng suất không thứ nguyên của dầm composite ba lớp (0°/90°/0°), tựa đơn và chịu tải phân bố đều [Nguồn: Nhóm tác giả]

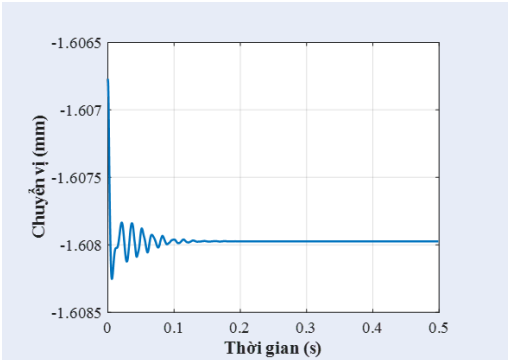
L / h	Phương pháp	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$
5	Vo và Thai ¹⁴	1.0670	0.4057
	MIGA	1.2049	0.3888
10	Vo và Thai ¹⁴	0.8503	0.4311
	MIGA	0.8707	0.4254
20	Vo và Thai ¹⁴	0.7961	0.4438
	MIGA	0.7987	0.4446

Bảng 4 trình bày các tần số tự nhiên không thứ nguyên đầu tiên của dầm composite $\bar{\omega} = \frac{\omega \times L^2}{h} \sqrt{\rho/E_2}$ với các cách bố trí sợi và các điều kiện biên khác nhau, trong đó ω là tần số tự nhiên, và ρ là khối lượng thể tích.

Kết quả trên Bảng 4 cũng thể hiện độ tin cậy cao của MIGA trong phân tích dao động, khi số liệu cho thấy tần số không thứ nguyên dựa trên MIGA có sai số rất nhỏ khi so với nghiệm giải tích 3D.

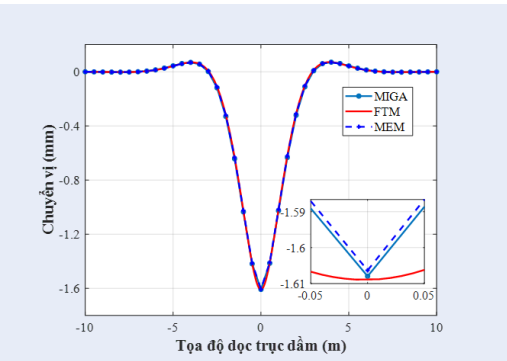
Kết quả phân tích tải trọng chuyển động

Hình 6 minh họa lịch sử thời gian của độ võng của dầm tại điểm đặt tải trọng. Dầm dao động trong giai đoạn đầu, nhưng nhanh chóng chuyển về trạng thái bán tĩnh khi các điều kiện ổn định được thiết lập. Lý do là vì tính chất bất biến theo thời gian của tải trọng chuyển động và giả định bề mặt dầm nhẵn hoàn toàn, dẫn đến lực kích thích không phụ thuộc vào thời gian. Những quan sát này phù hợp với báo cáo bởi Koh và cộng sự⁸.



Hình 6: Chuyển vị của dầm theo thời gian tại điểm đặt tải [Nguồn: Nhóm tác giả]

Hình 7 và Bảng 5 so sánh độ võng của dầm dựa trên phân tích bằng MIGA, phương pháp biến đổi Fourier (FTM) và MEM⁸. Kết quả cho thấy, độ võng dựa trên MIGA gần giống với nghiệm tham chiếu FTM dọc



Hình 7: Chuyển vị của dầm dọc theo hướng di chuyển của tải [Nguồn: Nhóm tác giả]

Bảng 5: So sánh hiệu quả giữa MEM và MIGA với FTM [Nguồn: Nhóm tác giả]

Phương pháp	Độ võng lớn nhất (mm)	Sai số so với FTM (%)	Thời gian tính toán (s)
MEM8	1.60632	0.16	6.328497
MIGA	1.60797	0.058	1.943202
FTM	1.6089	-	-

theo toàn bộ chiều dài dầm, trong khi biểu đồ của MEM cho thấy độ võng lớn hơn một chút ở vị trí tải tác dụng. Bảng 5 cũng cho thấy, sai số tương đối giữa FTM với MIGA nhỏ hơn đáng kể so với MEM. Hơn nữa, MIGA có thời gian tính toán ít hơn MEM. Hiệu suất được cải thiện này là do tính trơn và tính liên tục cao của các hàm cơ sở NURBS, cho phép dự đoán chính xác với ít bậc tự do hơn.

Nhìn chung, những kết quả phân tích ở trên xác nhận rằng MIGA là phương pháp tính toán chính xác và hiệu quả để phân tích các kết cấu dầm chịu tải trọng chuyển động.

Ứng xử của dầm composite trên nền đàn nhớt chịu tải trọng chuyển động

Độ tin cậy của công thức MIGA đã được xác minh trong Phần 3.1 thông qua so sánh với các kết quả sẵn có cho cả dầm composite chịu tải tĩnh và dầm đẳng hướng chịu tải trọng chuyển động trên nền đàn nhớt. Do công thức chủ đạo vẫn giữ nguyên và chỉ có mô hình vật liệu và cấu hình hình học được mở rộng nên khung MIGA đã được xác thực có thể được sử dụng một cách đáng tin cậy cho nghiên cứu số được trình bày dưới đây.

Xét dầm có $L = 50\text{m}$, và $h \times b = 0.3 \times 0.2\text{m}$; Tải trọng $P = 4100 \times 9.81\text{N}$ di chuyển với vận tốc từ $5 \div 80\text{m/s}$. Độ cứng nền thay đổi $k_f = 1 \times 10^7 \div 3 \times 10^7\text{N/m}^2$,

Bảng 4: Tần số không thứ nguyên đầu tiên của dầm composite [Nguồn: Nhóm tác giả]

Lớp	L / h	Phương pháp	Điều kiện biên		
			Khớp	Ngàm	Công-xôn
3 (0/90/0)	5	Giải tích 3D1	9.208	11.603	4.234
		MIGA	9.2107	11.891	4.257
	10	Giải tích 3D1	13.614	19.712	5.495
		MIGA	13.615	20.088	5.507
10 (0/90/...)	5	Giải tích 3D1	8.156	10.784	3.527
		MIGA	8.226	11.031	3.539
	10	Giải tích 3D1	10.893	17.580	4.197
		MIGA	10.998	17.869	4.202

và hệ số cản $c_f = 1 \times 4900 \div 10 \times 4900 \text{Ns/m}^2$. Vật liệu có $E_2 = 1.0756 \times 10^{10} \text{Pa}$; $E_1 = 1.3238 \times 10^{11} \text{Pa}$; $G_{23} = 3.606 \times 10^9 \text{Pa}$; $G_{13} = 5.6537 \times 10^9 \text{Pa}$; $G_{12} = G_{13}$; $\nu_{12} = 0.24$; $\rho = 1.29 \times 10^3 \text{kg/m}^3$. Dầm có ba lớp với hướng sợi $0^\circ/90^\circ/0^\circ$.

Hình 8 thể hiện độ võng lớn nhất của dầm composite đối với các giá trị khác nhau của độ cứng nền k_f , giảm chấn c_f và tốc độ tải V . Kết quả cho thấy, khi độ cứng nền tăng, độ võng của dầm giảm đi đáng kể. Chẳng hạn, ở $k_f = 1 \times 10^7 \text{N/m}^2$, độ võng nằm trong khoảng $-0,954$ đến $-0,964 \text{mm}$; trong khi ở $k_f = 3 \times 10^7 \text{N/m}^2$, độ võng giảm xuống khoảng $-0,4275$ đến $-0,429 \text{mm}$. Kết quả trên biểu đồ cũng thể hiện việc tăng độ cứng nền sẽ làm tăng độ cứng uốn của hệ thống dầm-nền, nhưng làm giảm độ nhạy của chuyển vị với các thông số khác.

Cản nền cũng có sự ảnh hưởng nhất định tới chuyển vị của dầm. Tăng cản nền dẫn tới chuyển vị giảm, tuy nhiên ở tốc độ thấp ($V \leq 20 \text{m/s}$), mức độ ảnh hưởng của cản không lớn. Ở tốc độ cao ($V \geq 30 \text{m/s}$), mức độ ảnh hưởng của cản trở nên rõ ràng hơn. Cụ thể, ở $k_f = 1 \times 10^7 \text{N/m}^2$, vận tốc $V = 80 \text{m/s}$, với cản nền $c_f = 1 \times 4900 \text{N}\cdot\text{s/m}^2$, độ võng của dầm là $-0,964 \text{mm}$; nhưng khi tăng lên $c_f = 10 \times 4900 \text{N}\cdot\text{s/m}^2$ thì độ võng giảm xuống còn $-0,954 \text{mm}$. Điều này chỉ ra rằng cản nền chỉ trở nên hiệu quả khi dao động động lực học của hệ được kích thích đáng kể.

Ảnh hưởng của vận tốc tải: khi độ cứng nền k_f lớn ($k_f = 2 \times 10$ và $3 \times 10 \text{N/m}^2$), chuyển vị của dầm tăng theo vận tốc tải, đặc biệt khi cản nền c_f nhỏ, cho thấy ảnh hưởng rõ rệt của hiệu ứng động. Ngược lại, đối với các trường hợp độ cứng nền k_f nhỏ, các đường chuyển vị ứng với các vận tốc khác nhau cắt nhau tại các giá trị cản nền $c_f = 7.5 \times 4900 \text{N}\cdot\text{s/m}^2$ (với $k_f = 1 \times 10 \text{N/m}^2$) và $c_f = 9 \times 4900 \text{N}\cdot\text{s/m}^2$ (với $k_f = 1.5 \times 10$

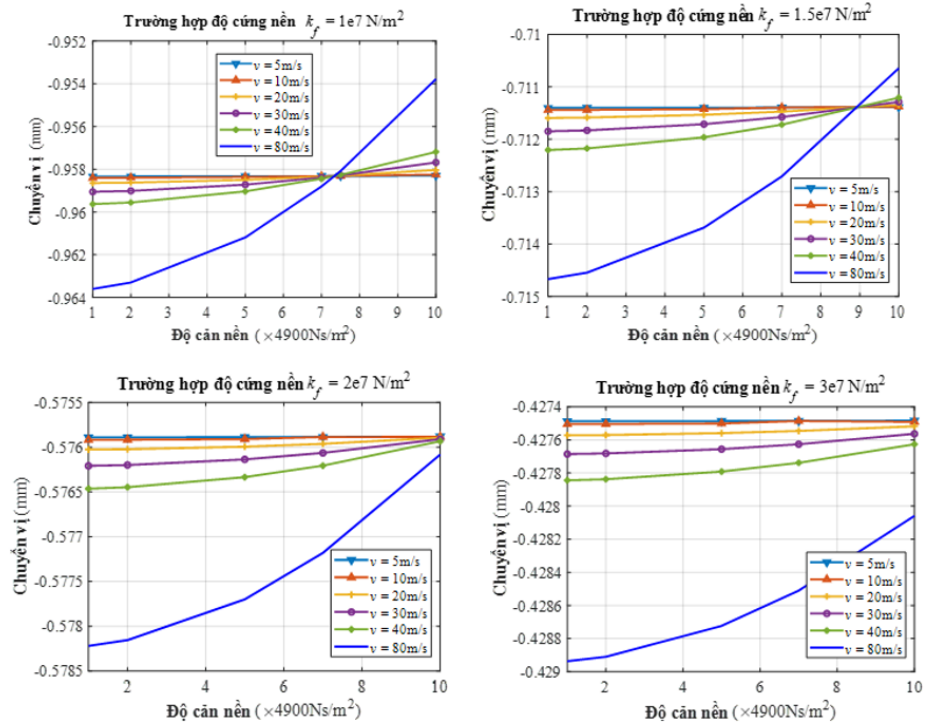
N/m^2). Điều này cho thấy có sự tồn tại về giá trị cản tới hạn của hệ. Khi c_f nhỏ hơn giá trị tới hạn, vận tốc tải càng tăng sẽ gây ra chuyển vị càng lớn do sự chi phối của hiệu ứng quán tính. Tuy nhiên, khi c_f vượt qua ngưỡng tới hạn, cản nền trở thành cơ chế chi phối chính, làm suy giảm đáng kể thành phần động, dẫn đến việc vận tốc lớn hơn lại cho chuyển vị nhỏ hơn.

KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã phát triển và xác thực toàn diện một cách thức tiếp cận mới cho phân tích các kết cấu dầm composite siêu dài chịu tác dụng tải trọng di động. Những kết luận chính được rút ra như sau:

- MIGA được xây dựng bằng cách kết hợp tính liên tục bậc cao của IGA với hiệu quả tính toán của MEM, cho phép phân tích chính xác và hiệu quả các dầm siêu dài chịu tải trọng di động.
- Kết quả của MIGA cho thấy sự tương đồng với nghiệm giải tích 3D và các phương pháp số khác, với sai số là rất nhỏ, trong khi giảm đáng kể chi phí tính toán.
- Ảnh hưởng của vận tốc tải tới chuyển vị của dầm phụ thuộc vào giá trị cản nền tới hạn, khi cản nền nhỏ hơn giá trị tới hạn, vận tốc tải càng lớn thì chuyển vị càng tăng. Ngược lại, khi cản nền vượt quá cản tới hạn sẽ làm suy giảm thành phần động và dẫn đến chuyển vị giảm khi vận tốc tải tăng.
- Độ cứng và cản nền có ảnh hưởng lớn đến chuyển vị của hệ dầm-nền chịu tải trọng di chuyển. Việc tăng độ cứng nền làm tăng độ cứng uốn tổng thể của hệ, và làm giảm độ nhạy của chuyển vị đối với các tham số động khác. Tăng cản nền làm giảm độ võng, nhưng chỉ rõ rệt ở các vận tốc tải lớn.

Nhìn chung, phương pháp MIGA là một công cụ vững chắc và hiệu quả để phân tích ứng xử kết cấu dầm có



Hình 8: Độ võng lớn nhất của dầm composite với hệ số nền và vận tốc tải khác nhau [Nguồn: Nhóm tác giả]

chiều dài rất lớn, chịu tải trọng di động và sử dụng vật liệu dị dương. Các nghiên cứu trong tương lai nên mở rộng phương pháp MIGA cho các kết cấu dầm và tấm ba chiều với các cấu hình hình học phức tạp, đồng thời tiếp tục cải tiến, thu gọn mô hình để tăng hiệu quả tính toán.

DANH MỤC TỪ VIẾT TẮT

MEM: Phương pháp phần tử chuyển động (moving element method).

FEM: Phương pháp phần tử hữu hạn (finite element method).

MIGA: Phương pháp đẳng hình học chuyển động (moving isogeometric analysis).

FTM: Phương pháp biến đổi Fourier (Fourier transform method).

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu được tài trợ bởi Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) trong khuôn khổ Đề tài mã số: B2026-20-18.

XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

Tác giả không có bất kỳ xung đột lợi ích nào trong công bố bài báo.

ĐÓNG GÓP CỦA TÁC GIẢ

Đỗ Ngọc Thuận: Thực hiện xây dựng phương pháp, thiết lập phương trình chuyển động, viết chương trình tính toán bằng MATLAB và viết bản thảo.

Lương Văn Hải: Định hướng cho quá trình phát triển phương pháp và cùng viết bản thảo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Khdeir AA, Reddy JN. Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions. *Int J Eng Sci.* 1994;32:1971–1980. Available from: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)90093-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)90093-0).
2. Dinev D. Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions. *Eng Mech.* 2012;19:381–392.
3. Doeua O, Masjedi PK, Weaver PM. Exact analytical solution for static deflection of Timoshenko composite beams on two-parameter elastic foundations. *Thin-Walled Struct.* 2022;172:108812.
4. Abdelrahman AA, Esen I, Daikh AA, Eltaher MA. Dynamic analysis of FG nanobeam reinforced by carbon nanotubes and resting on elastic foundation under moving load. *Mech Based Des Struct Mach.* 2023;51:5383–5406.
5. Corvi A. A preliminary approach to composite beam design using FEM analysis. *Compos Struct.* 1990;16:259–275.
6. Duhamel D, Mace BR, Brennan MJ. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *J Sound Vib.* 2006;294:205–220.

7. Alshorbagy AE, Eltaher MA, Mahmoud FF. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Appl Math Model*. 2011;35:412–425.
8. Koh CG, Ong JSY, Chua DKH, Feng J. Moving element method for train-track dynamics. *Int J Numer Methods Eng*. 2003;56:1549–1567.
9. Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput Methods Appl Mech Eng*. 2005;194:4135–4195.
10. Hong NT. A novel isogeometric model for free vibration, buckling, and transient response of double-layer BFGP curved beams with elastic boundary condition using modified first-order shear theory. *Mech Based Des Struct Mach*. 2025;53:5119–5151.
11. Akgöz B, Civalek Ö. A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory. *Int J Eng Sci*. 2013;70:1–14.
12. Nguyen-Xuan H, Thai CH, Guyen-Thoi T. Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory. *Compos Part B Eng*. 2013;55:558–574.
13. Khdeir AA, Reddy JN. An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams. *Compos Struct*. 1997;37:195–203.
14. Vo TP, Thai H. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories. *Compos Struct*. 2012;94:2513–2522.

A novel approach combining isogeometric analysis and the moving element method for the analysis of ultra-long beams under moving loads

Do Ngoc Thuan^{1,2}, Luong Van Hai^{1,2,*}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

¹Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Technology (HCMUT), 268 Ly Thuong Kiet Street, Dien Hong Ward, Ho Chi Minh City, Vietnam

²Vietnam National University Ho Chi Minh City (VNU-HCM), Linh Xuan Ward, Ho Chi Minh City, Vietnam

Correspondence

Luong Van Hai, Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Technology (HCMUT), 268 Ly Thuong Kiet Street, Dien Hong Ward, Ho Chi Minh City, Vietnam

Vietnam National University Ho Chi Minh City (VNU-HCM), Linh Xuan Ward, Ho Chi Minh City, Vietnam

Email: lvhai@hcmut.edu.vn

History

- Received: 05-02-2026
- Revised: 10-03-2026
- Accepted: 27-05-2026
- Published Online: x20-08-2026

DOI : <https://doi.org/10.32508/vnuhcmj-et.v9i3.1575>



Copyright

© VNUHCM Journal. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license.

ABSTRACT

This paper presents a novel numerical approach that combines isogeometric analysis and the moving element method, referred to herein as moving isogeometric analysis, for the dynamic analysis of ultra-long composite beams subjected to moving loads on viscoelastic foundations. In the proposed formulation, the moving coordinate system of the moving element method is integrated with the NURBS-based functions of the isogeometric analysis, enabling exact geometric representation while significantly improving computational efficiency for large-span structural problems. To accurately capture the mechanical behavior of composite materials and the effects of transverse shear deformation, a higher-order shear deformation theory is employed. The use of NURBS basis functions not only eliminates geometric approximation errors but also naturally satisfies the higher-order continuity requirements of the higher-order shear deformation theory, thereby enhancing the accuracy and numerical stability of the proposed model.

The reliability and effectiveness of the moving isogeometric analysis approach are validated through several numerical examples and comparisons with analytical solutions as well as previously published results. The obtained results demonstrate that the proposed method achieves excellent agreement with three-dimensional elasticity solutions in static analysis. In dynamic analysis, the moving isogeometric analysis provides results that closely match the reference solutions while requiring less computational time than the conventional moving element method and yielding higher accuracy compared with the Fourier transform method. Finally, the influences of viscoelastic foundation parameters and moving load velocity on the dynamic responses of composite beams are systematically investigated and discussed in detail.

Key words: moving isogeometric analysis, composite beams, moving loads, NURBS, viscoelastic foundation

Cite this article : Thuan D N, Hai L V. **A novel approach combining isogeometric analysis and the moving element method for the analysis of ultra-long beams under moving loads.** *VNUHCM J. Eng. Technol.* 2026; 9(3):3178-3187.